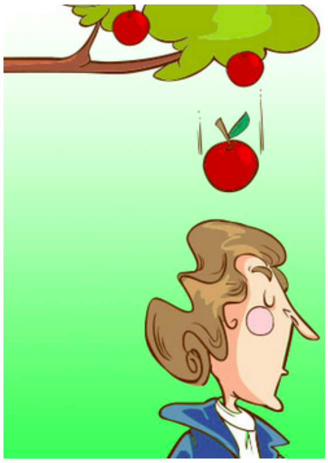
CHAPITRE 5

Dérivation Locale

Objectifs

1. Calculer le nombre dérivé d'une fonction en un point
2. Déterminer une équation d'une tangente
3. Déterminer graphiquement un nombre dérivé

Introduction



Un objet tombe verticalement en chute libre, sans vitesse initiale. On admet que la distance parcourue (en mètres) par cet objet au bout t secondes est égale à :

$$d(t) = 5t^2$$

1. Quelle est la distance parcourue par l'objet :
   (a) au bout de 1s ?
   (b) au bout de 3s ?
2. Quelle est la vitesse moyenne de l'objet entre les instants $t = 1$ et $t = 3$?
3. Quelle est la vitesse moyenne de l'objet entre les instants $t = 2$ et $t = 3$?

On souhaite à présent déterminer la vitesse **instantanée** de l'objet au bout de 2 secondes de chute. La vitesse instantanée d'un mobile est le rapport $\frac{\Delta d}{\Delta t}$, où Δd est la distance parcourue sur un très bref intervalle de temps Δt.
Idéalement, Δt doit être aussi proche de 0 que possible. Dans notre cas, on a :

$$\Delta d = d(2 + \Delta t) - d(2)$$

4. Recopier et compléter le tableau suivant :

Δt	1	0,1	0,01	0,001
Δd	25	2,05		
$\frac{\Delta d}{\Delta t}$	25			

5. Lorsque Δt se rapproche de 0, vers quelle valeur se rappoche le rapport $\frac{\Delta d}{\Delta t}$?
6. Démontrer que $\Delta d = 5 \times (4 + \Delta t) \times \Delta t$ et retrouver le résultat précédent.
7. Quelle est la vitesse instantanée au bout de 2 secondes de chute ?

Application : on lâche un objet depuis le haut d'un immeuble de 25m de haut, et on suppose qu'il tombe en chute libre. Quelle est la vitesse d'impact de l'objet avec le sol ?

☞ *Calculer d'abord la durée de la chute...*

5.1 Notion de limite

Définition. On dit qu'une fonction f **admet pour limite** l **lorsque** x **tend vers** a si, de façon intuitive, $f(x)$ est aussi proche du réel l que l'on veut dès que x est assez proche de a.
On note alors $\lim\limits_{x \to a} f(x) = l$.

Cas d'une fonction définie en a

Soit f une fonction polynôme, une des fonctions $x \mapsto \sqrt{x}$, $x \mapsto \cos x$, $x \mapsto \sin x$ ou bien la somme, le produit, le quotient ou la valeur absolue de telles fonctions.
Si f est définie en a, alors $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$.

Exemple. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2 - 1$.
On peut calculer la limite en 0 de la fonction f, car c'est une fonction polynôme définie en 0.

$$\lim_{x \to 0} f(x) = f(0) = -1$$

Exemple. Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R} \setminus \{2\}$ par $g(x) = \frac{x+4}{x-2}$.
On peut calculer la limite en 0 de la fonction g, car c'est un quotient de fonctions affines, et elle est définie en 0.

$$\lim_{x \to 0} g(x) = g(0) = -2$$

Exemple. Soit h la fonction définie sur $\mathbb{R} \setminus \{1\}$ par $h(x) = \frac{x^2-1}{x-1}$.
h n'étant pas définie en 1, on ne peut pas directement calculer sa limite en 1.
Cependant, un tableau de valeurs déterminé avec la calculatrice donne :

x	0,9	0,99	0,999	1	1,001	1,01	1,1
$h(x)$	1,9	1,99	1,999	Erreur	2,001	2,01	2,1

Il semble donc que h se rapproche de 2 lorsque x se rapproche de 1, et on a envie d'écrire :

$$\lim_{x \to 1} h(x) = 2$$

Cas d'une fonction non définie en a

Soit f une fonction non définie en a.
Si, pour tout $x \neq a$, $f(x) = g(x)$ où g est une fonction vérifiant les conditions précédentes et définie en a, alors f admet une limite en a et $\lim\limits_{x \to a} f(x) = g(a)$.

Exemple. Dans l'exemple précédent, $f(x) = \frac{x^2-1}{x-1}$. L'expression $f(x)$ peut se simplifier : $f(x) = \frac{x^2-1}{x-1} = \frac{(x-1)(x+1)}{x-1} = x+1 = g(x)$.
La fonction g est définie en 1, c'est une fonction affine donc :

$$\lim_{x \to 1} f(x) = g(1) = 2$$

Exemple. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^*$ par $f(x) = \frac{\sqrt{1+x}-1}{x}$.
f n'est pas définie en 0, mais un tableau de valeurs permet de voir que la limite de f en 0 semble être $\frac{1}{2}$:

x	-0,1	-0,01	-0,001	0	0,001	0,01	0,1
$h(x)$	0,5132	0,5013	0,5001	Erreur	0,4999	0,4988	0,4881

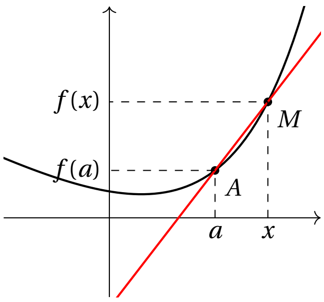
On peut transformer son expression en multipliant par la quantité conjuguée :

$$f(x) = \frac{\sqrt{1+x}-1}{x} = \frac{\left(\sqrt{x+1}-1\right)\left(\sqrt{x+1}+1\right)}{x\left(\sqrt{x+1}+1\right)} = \frac{x+1-1}{x\left(\sqrt{x+1}+1\right)} = \frac{1}{\sqrt{x+1}+1}$$

Dans cette dernière expression, on peut remplacer x par 0 et déterminer la limite de f en 0 :

$$\lim_{x\to 0} f(x) = \frac{1}{2}$$

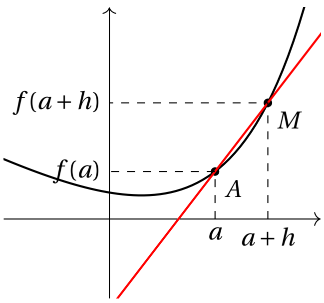
5.2 Nombre dérivé



Définition. Soit f une fonction définie sur un intervalle I, et soit $a \in I$.
On appelle **taux d'accroissement** de f au point a le nombre $\tau_a(x)$, défini pour tout $x \neq a$ par :

$$\tau_a(x) = \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$$

Remarque. Graphiquement, $\tau_a(x)$ est la pente de la sécante (AM), avec $A(a; f(a))$ et $M(x; f(x))$.



Remarque. En remplaçant x par $a+h$, le taux d'accroissement peut encore s'écrire :

$$\tau_a(h) = \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

Remarque. Le taux d'accroissement n'est pas défini en $x = a$ (ou en $h = 0$).

Définition. Lorsque le taux d'accroissement de f en a admet une limite l en $x = a$ (ou en $h = 0$), on dit que f **est dérivable en** a. On note alors :

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = l \qquad \text{ou} \qquad \lim_{h\to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h} = l$$

Le nombre l est noté $f'(a)$: c'est le **nombre dérivé de** f **en** a.

Exemple. Considérons la fonction carrée $f : x \mapsto x^2$. Montrons que f est dérivable en 1 et calculons $f'(1)$.
On simplifie le taux d'accroissement en $a = 1$:

$$\frac{f(1+h)-f(1)}{h} = \frac{(1+h)^2-1^2}{h} = \frac{2h+h^2}{h} = 2+h$$

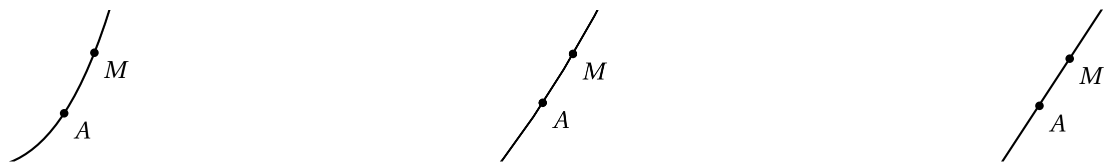
Ce dernier terme est défini en $h = 0$. On peut donc calculer la limite du taux d'accroissement :

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(1+h)-f(1)}{h} = 2 + \mathbf{0} = 2$$

Ainsi, f est dérivable en 1 et $f'(1) = 2$.

Interprétation graphique

Faire se rapprocher x de a (ou h de 0), c'est faire se rapprocher le point M du point A. Observons le déplacement du point M vers le point A, et remarquons l'aspect de la courbe lorsque l'on « zoome » sur le point A :



$h = 0.5$ $h = 0.1$ $h = 0.01$

Lorsque M est suffisament proche de A, la courbe semble être affine, et s'assimile à la sécante (AM).
Le **taux d'accroissement** (qui est la pente de la sécante) se rapproche donc d'une valeur limite : la « pente de la courbe » au voisinage du point A.
La **sécante** se rapproche quant à elle d'une « droite limite » que l'on appelle la **tangente** au point d'abscisse a.

Définition. Soit f une fonction dérivable en a.
On appelle **tangente à la courbe $\mathscr{C}_f$ au point** $A(a; f(a))$ la droite passant par A et de coefficient directeur $f'(a)$.

Interprétation cinématique

Si la fonction d décrit la distance parcourue par un objet au cours du temps, alors le nombre dérivé en t de la fonction d, $d'(t)$, représente la vitesse instantanée de l'objet à l'instant t.

$$d'(t) = \lim_{h \to 0} \frac{d(t+h) - d(t)}{h}$$

Propriété. *Soit f une fonction dérivable en a.*
L'équation réduite de la tangente $\mathscr{C}_f$ en a est donnée par :

$$T_a : y = f'(a)(x-a) + f(a)$$

Démonstration. *Soit f une fonction dérivable en a.*
Par définition, la tangente T_a à la courbe $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse a est la droite passant par $A(a; f(a))$, de coefficient directeur $f'(a)$.
Son équation réduite est donc de la forme :

$$y = f'(a)x + p$$

De plus, $A(a; f(a)) \in T_a$ donc :

$$f(a) = f'(a)a + p \implies p = f(a) - af'(a)$$

D'où :

$$T_a : y = f'(a)x + f(a) - af'(a) \iff \boxed{T_a : y = f'(a)(x-a) + f(a)}$$

□

Exemple. Déterminons l'équation de la tangente T_1 dans l'exemple précédent. On a montré que $f'(1) = 2$. De plus, $f(1) = 1$, donc l'équation de T_1 est :

$$y = f'(1)(x-1) + f(1) \iff y = 2x - 1$$

Exemple. On considère maintenant la fonction g définie sur $\mathbb{R}^+$ par $g(x) = \sqrt{x}$. Montrons que g est dérivable en 1, et déterminons une équation réduite de la tangente à $\mathscr{C}_g$ en 1.

$$g'(1) = \frac{1}{2} \qquad T_1 : y = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$$

Exemple. Même exercice mais en 0...