Exercices : Dérivation Locale (2)

Exercice 1. Dans chaque cas, montrer que f est dérivable en a et préciser la valeur de $f'(a)$.

1. $f(x) = 3x+2 \qquad a = 1$
2. $f(x) = x^2+1 \qquad a = 2$
3. $f(x) = x^2-2x \qquad a = 0$
4. $f(x) = x^3+x^2 \qquad a = 1$
5. $f(x) = 3x-2x^2 \qquad a = 1$
6. $f(x) = x^2-6 \qquad a = -1$
7. $f(x) = \frac{2}{x} \qquad a = 1$
8. $f(x) = \frac{x}{x+1} \qquad a = 1$

Exercice 2. On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = 2-x^2$$

1. Calculer $f'(2)$.
2. Déterminer l'équation de la tangente à $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse 2.
3. Même exercice avec les fonctions suivantes :
   (a) $f(x) = x^2+3x$
   (b) $f(x) = x+\frac{1}{x}$

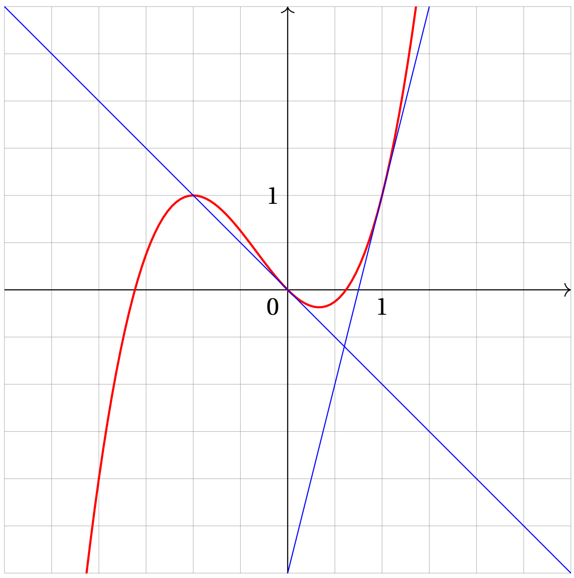
Exercice 3. Calculer la valeur de $f'(a)$ de chacune des fonctions de l'exercice 1, où a désigne un réel quelconque.

Exercice 4. Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$g(x) = x^3-3x$$

1. Calculer $g'(a)$ pour tout réel a.
2. Représenter la fonction g à l'aide de la calculatrice, et déterminer graphiquement les coordonnées des différents points de la courbe où la tangente est parallèle à l'axe des abscisses.
3. Retrouver ces valeurs par un calcul.

Exercice 5. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ dont la représentation graphique est donnée ci-dessous :



1. Déterminer graphiquement :
   (a) $f(0)$ et $f'(0)$
   (b) $f(1)$ et $f'(1)$
   (c) $f(-1)$ et $f'(-1)$
   (d) L'équation de la tangente à $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse 1.
   (e) Le signe de $f'(-2)$
   (f) Les solutions de l'équation $f(x) = 0$
   (g) Les solutions de l'équation $f'(x) = 0$
2. L'expression de la fonction f est $f(x) = x^3+x^2-x$.
   (a) Montrer que pour tout réel a, $f'(a) = 3a^2+2a-1$
   (b) Retrouver tous les résultats précédents par le calcul.

Corrections

Exercice 1.

1. $f'(1) = 3$
2. $f'(2) = 4$
3. $f'(0) = -2$
4. $f'(1) = 5$
5. $f'(1) = -1$
6. $f'(-1) = -2$
7. $f'(1) = -2$
8. $f'(1) = \frac{1}{4}$

Exercice 2.

1. $f'(2) = -4$
2. L'équation de la tangente en $a = 2$ est donnée par :

$$y = f'(2)(x-2) + f(2)$$

Or, $f(2) = -2$ et $f'(2) = -4$, d'où :

$$y = -4(x-2) - 2 \iff y = -4x + 8 - 2 \iff \boxed{y = -4x + 6}$$

3. (a) $f'(2) = 7$ $\qquad T_2 : y = 7x - 4$

(b) $f(2+h) = 2 + h + \frac{1}{2+h}$ $\qquad f(2) = 2 + \frac{1}{2} = \frac{5}{2}$

$f(2+h) - f(2) = 2 + h + \frac{1}{2+h} - \frac{5}{2} = -\frac{1}{2} + h + \frac{1}{2+h} = \frac{-\frac{1}{2}+h}{1} + \frac{1}{2+h} = \frac{(-\frac{1}{2}+h)(2+h)}{2+h} + \frac{1}{2+h} = \frac{-1-\frac{1}{2}h+2h+h^2}{2+h} + \frac{1}{2+h} = \frac{\frac{3}{2}h+h^2}{2+h}$

Ainsi, on a : $\frac{f(2+h)-f(2)}{h} = \frac{\frac{\frac{3}{2}h+h^2}{2+h}}{h} = \frac{\frac{3}{2}h+h^2}{2+h} \times \frac{1}{h} = \frac{\cancel{h}(\frac{3}{2}+h)}{2+h} \times \frac{1}{\cancel{h}} = \frac{\frac{3}{2}+h}{2+h}$

D'où : $\lim\limits_{h\to 0} \frac{f(2+h)-f(2)}{h} = \lim\limits_{h\to 0} \frac{\frac{3}{2}+h}{2+h} = \frac{\frac{3}{2}+0}{2+0} = \frac{\frac{3}{2}}{2} = \frac{3}{4}$

Donc $\boxed{f'(2) = \dfrac{3}{4}}$.

L'équation de la tangente est :

$$y = f'(2)(x-2) + f(2) \iff y = \tfrac{3}{4}(x-2) + \tfrac{5}{2} \iff y = \tfrac{3}{4}x - 2 \times \tfrac{3}{4} + \tfrac{5}{2} \iff y = \tfrac{3}{4}x - \tfrac{3}{2} + \tfrac{5}{2} \iff \boxed{y = \dfrac{3}{4}x + 1}$$

Exercice 3.

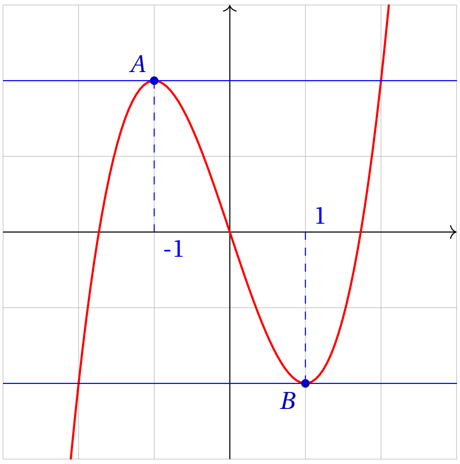
1. $f'(a) = 3$
2. $f'(a) = 2a$
3. $f'(a) = 2a - 2$
4. $f'(a) = 3a^2 + 2a$
5. $f'(a) = 3 - 4a$
6. $f'(a) = 2a$
7. $f'(a) = -\frac{2}{a^2}$ $\qquad a \neq 0$
8. $f(a+h) = \frac{a+h}{a+h+1}$ $\qquad f(a) = \frac{a}{a+1}$

$f(a+h) - f(a) = \frac{a+h}{a+h+1} - \frac{a}{a+1} = \frac{(a+1)(a+h)}{(a+1)(a+h+1)} - \frac{a(a+h+1)}{(a+1)(a+h+1)} = \frac{(a+1)(a+h)-a(a+h+1)}{(a+1)(a+h+1)} = \frac{a^2+ah+a+h-a^2-ah-a}{(a+1)(a+h+1)} = \frac{h}{(a+1)(a+h+1)}$

Ainsi, $\tau_a(h) = \frac{1}{(a+1)(a+h+1)}$.

On a donc $f'(a) = \lim\limits_{h\to 0} \frac{1}{(a+1)(a+h+1)} = \frac{1}{(a+1)(a+0+1)} = \boxed{\frac{1}{(a+1)^2}}$ pour $a \neq -1$

Exercice 4.

1. $g'(a) = 3a^2 - 3$
2. 

   Graphiquement, la courbe admet deux tangentes parallèles à l'axe des abscisses aux points $A(-1;2)$ et $B(1;-2)$.
3. Une tangente parallèle à l'axe des abscisses a une pente égale à 0. Or, la pente de la tangente au point d'abscisse a est égale au nombre dérivé $g'(a)$. Il faut donc résoudre l'équation :

$$g'(a) = 0 \iff 3a^2 - 3 = 0$$

C'est une équation du second degré, mais il n'est pas nécessaire de la résoudre avec Δ :

$$3a^2 - 3 = 0 \iff 3a^2 = 3 \iff a^2 = 1 \iff a = -1 \text{ ou } a = 1$$

Il existe donc deux points de la courbe où la tangente est parallèle à l'axe des abscisses : ce sont les points de la courbe d'abscisses -1 (A) et 1 (B). Pour déterminer l'ordonnée de chacun de ces deux points, on calcule les images de -1 et de 1, ce qui donne respectivement :

- $f(-1) = (-1)^3 - 3 \times (-1) = 2 \implies A(-1;2)$
- $f(1) = 1^3 - 3 \times 1 = -2 \implies B(1;-2)$

Exercice 5.

1. (a) $f(0) = 0$ ($f(0)$ représente l'image de 0) et $f'(0) = -1$ ($f'(0)$ représente la pente de la tangente en 0)

   Pour déterminer graphiquement la pente de la tangente, on calcule le quotient $\frac{\Delta y}{\Delta x}$, où Δx et Δy sont les variations horizontale et verticale entre deux points de la droite.

   Pour la tangente en 0, on peut considérer les points $(0;0)$ et $(1;-1)$: $\Delta x = 1$ et $\Delta y = -1$, d'où $f'(0) = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{-1}{1} = -1$.

   (b) $f(1) = 1$ et $f'(1) = 4$

   (c) $f(-1) = 1$ et $f'(-1) = 0$: bien que la tangente ne soit pas représentée ici, on « s'imagine » la tangente en -1. Cette tangente semble horizontale, donc sa pente est nulle, donc $f'(-1) = 0$.

   (d) L'équation de la tangente au point d'abscisse 1 est :

$$y = f'(1)(x-1) + f(1)$$

   Comme $f(1) = 1$ et $f'(1) = 4$, on en déduit que :

$$y = 4(x-1) + 1 \iff \boxed{y = 4x - 3}$$

   (e) La tangente en -2 n'est pas représentée, mais il est clair que cette tangente est une droite croissante. Ainsi, sa pente est positive, et donc $f'(-2) > 0$.

   (f) L'équation $f(x) = 0$ admet graphiquement 3 solutions (intersection de la courbe avec l'axe des abscisses) :

$$x_1 \simeq -1,6 \qquad x_2 = 0 \qquad x_3 \simeq 0,6$$

   (g) L'équation $f'(x) = 0$ admet graphiquement 2 solutions : en effet, si $f'(x) = 0$, alors la tangente est horizontale au point x. Or, la courbe présente 2 points pour lesquels la tangente est horizontale. Graphiquement, les abscisses de ces points sont :

$$x_1 = -1 \qquad x_2 \simeq 0,4$$

2. (a)

   (b) Connaissant les expressions de $f(x)$ et de $f'(x)$, on peut maintenant retrouver les résultats du 1.) par le calcul :

      i. $f(0) = 0^3 + 0^2 - 0 = 0$ $\quad f'(0) = 3 \times 0^2 + 2 \times 0 - 1 = -1$

      ii. $f(1) = 1^3 + 1^2 - 1 = 1$ $\quad f'(1) = 3 \times 1^2 + 2 \times 1 - 1 = 4$

      iii. $f(-1) = (-1)^3 + (-1)^2 - (-1) = -1 + 1 + 1 = 1$ $\quad f'(-1) = 3 \times (-1)^2 + 2 \times (-1) - 1 = 3 - 2 - 1 = 0$

      iv. Les valeurs de $f(1)$ et $f'(1)$ sont identiques, donc le résultat est inchangé.

      v. $f'(-2) = 3 \times (-2)^2 + 2 \times (-2) - 1 = 12 - 4 - 1 = 7$ donc $f'(2) > 0$.

      vi.
$$f(x) = 0 \iff x^3 + x^2 - x = 0 \iff x(x^2 + x - 1) = 0$$
      Cette dernière équation est une équation produit nul, on a donc :
$$x = 0 \qquad \text{ou} \qquad x^2 + x - 1 = 0$$
      On retrouve donc la solution $x = 0$. La seconde équation est une équation du second degré. On trouve $\Delta = 5$, et les solutions sont :
$$x_1 = \frac{-1 - \sqrt{5}}{2} \qquad x_2 = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2}$$
      D'où les trois solutions :
$$\boxed{\mathscr{S} = \left\{ \frac{-1 - \sqrt{5}}{2} \ ; \ 0 \ ; \ \frac{-1 - \sqrt{5}}{2} \right\}}$$

      vii.
$$f'(x) = 0 \iff 3x^2 + 2x - 1 = 0$$
      C'est une équation du second degré. Les solutions sont :
$$\boxed{\mathscr{S} = \left\{ -1 \ ; \ \frac{1}{3} \right\}}$$