CHAPITRE 6

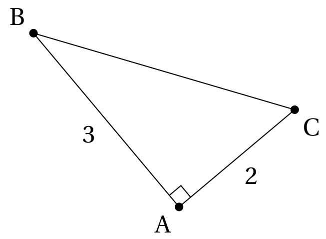
Produit Scalaire

Objectifs

1. Calculer un produit scalaire en utilisant une formule adaptée
2. Caractériser l'orthogonalité avec le produit scalaire
3. Calculer des longueurs et des mesures d'angle

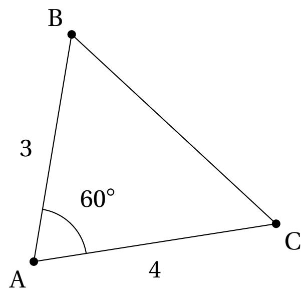
Introduction

1. On considère le triangle ABC suivant, rectangle en A.



   Calculer la valeur exacte de BC, puis déterminer une valeur approchée au degré près des angles $\widehat{B}$ et $\widehat{C}$.

2. On considère à présent le triangle ABC suivant :



   Peut-on déterminer la longueur BC ? la mesure des angles $\widehat{B}$ et $\widehat{C}$?

6.1 Produit scalaire

6.1.1 Produit scalaire et normes

Définition. On appelle **produit scalaire** de deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ le **nombre réel** :

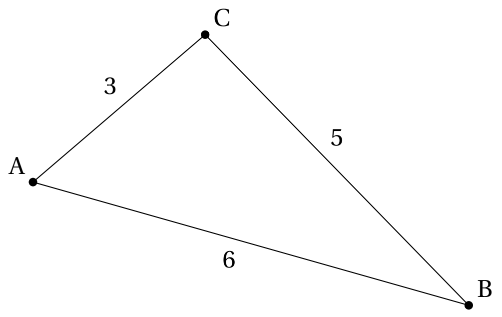
$$\boxed{\vec{u}\cdot\vec{v} = \frac{1}{2}(\|\vec{u}+\vec{v}\|^2 - \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2)}$$

$$ou$$

$$\boxed{\vec{u}\cdot\vec{v} = \frac{1}{2}(\|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 - \|\vec{u}-\vec{v}\|^2)}$$

Ces deux définitions équivalentes permettent de calculer le produit scalaire de deux vecteurs, en connaissant leurs normes et la norme d'un des vecteurs $\vec{u}+\vec{v}$ ou $\vec{u}-\vec{v}$.

Exemple. A, B et C sont 3 points tels que $AB = 6$, $AC = 3$ et $BC = 5$. En remarquant que $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CA} = \overrightarrow{CB}$, on peut calculer le produit scalaire $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$ avec la deuxième formule :



$$\begin{aligned}
\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} &= \frac{1}{2}\left(\|\overrightarrow{AB}\|^2 + \|\overrightarrow{AC}\|^2 - \|\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}\|^2\right)\\
&= \frac{1}{2}(AB^2 + AC^2 - BC^2)\\
&= \frac{1}{2}(36+9-25)\\
&= \mathbf{10}
\end{aligned}$$

Dans l'exemple précédent, nous avons montré la propriété suivante :

Propriété. *Pour tous points A,B et C du plan, on a :*

$$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} = \frac{1}{2}(AB^2 + AC^2 - BC^2)$$

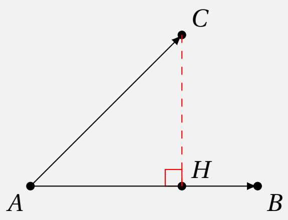
Exemple. Soit $RECT$ un rectangle, tel que $RE = 6$ et $RT = 4$. Calculer $\overrightarrow{RE}\cdot\overrightarrow{RC}$.

6.1.2 Produit scalaire et projection orthogonale

On peut exprimer le produit scalaire $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$ de manière très simple, à condition d'introduire un point H bien choisi :

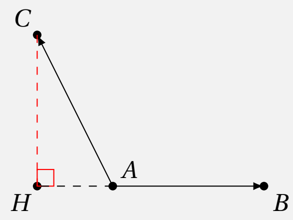
Propriété. *Soient A, B, C trois points distincts du plan. Soit H le* projeté orthogonal *de C sur (AB). Alors :*

$$\boxed{\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AH}}$$



Si $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AH}$ sont de même sens :

$$\boxed{\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=AB.AH}$$



Si $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AH}$ sont de sens contraires :

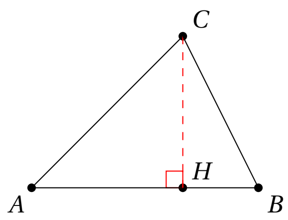
$$\boxed{\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=-AB.AH}$$

Démonstration. *On démontre la propriété dans le cas où A, B, C ne sont pas alignés, et où $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AH}$ sont dans le même sens. La démonstration repose sur le fait que les triangles AHC et BHC sont rectangles en H, ce qui implique que :*

$$BC^2=BH^2+CH^2 \qquad AC^2=CH^2+AH^2$$

D'après une propriété précédente, on a :

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} &= \frac{1}{2}(AB^2+\mathbf{AC^2}-\mathbf{BC^2})\\
&= \frac{1}{2}(AB^2+(CH^2+AH^2)-(BH^2+CH^2))\\
&= \frac{1}{2}(AB^2+CH^2+AH^2-BH^2-CH^2)\\
&= \frac{1}{2}(AB^2+AH^2-BH^2)\\
&= \frac{1}{2}(AB^2+AH^2-(AH-AB)^2)\\
&= \frac{1}{2}(AB^2+AH^2-(AH^2-2AB.AH+AB^2))\\
&= \frac{1}{2}(2AB.AH)\\
&= AB.AH
\end{aligned}$$



D'où :

$$\boxed{\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=AB.AH}$$

□

Exemple. Soit $ABCD$ un carré de côté 1. Calculer $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}$.

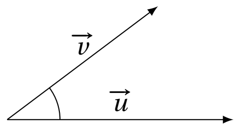
6.1.3 Produit scalaire et angles

On dispose d'une formule "géométrique" plus générale que la précédente, qui ne nécessite pas l'introduction du point H, mais qui fait intervenir le cosinus d'un angle :

Propriété. *Soient $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ deux vecteurs non nuls du plan. Alors :*

$$\boxed{\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{v} = \|\overrightarrow{u}\| \times \|\overrightarrow{v}\| \times \cos\left(\overrightarrow{u},\overrightarrow{v}\right)}$$

Remarque. Dans l'expression précédente, $\cos\left(\overrightarrow{u},\overrightarrow{v}\right)$ est le cosinus de la mesure en radians de l'angle formé par les vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$, représentés avec la même origine.



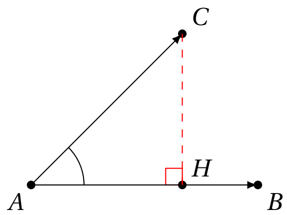
En considérant 3 points, on a la propriété équivalente suivante :

Propriété. *Soient A, B et C trois points du plan distincts. Alors :*

$$\boxed{\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} = AB \times AC \times \cos\left(\widehat{BAC}\right)}$$

Démonstration. *Ce résultat s'obtient facilement avec la formule précédente.*

1er cas : *l'angle $\widehat{BAC}$ est aigu.*



Dans ce cas, on a d'après la formule précédente :

$$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} = AB \times AH$$

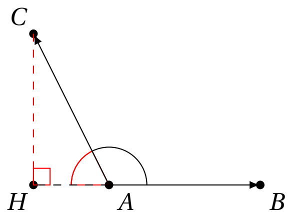
Or, dans le triangle AHC rectangle en H, on a d'après la trigonométrie de collège $\cos\left(\widehat{BAC}\right) = \cos\left(\widehat{HAC}\right) = \frac{AH}{AC}$ et donc :

$$AH = AC \times \cos\left(\widehat{BAC}\right)$$

Et donc :

$$\boxed{\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} = AB \times AC \times \cos\left(\widehat{BAC}\right)}$$

2ème cas : *l'angle $\widehat{BAC}$ est obtus.*



Dans ce cas, on a d'après la formule précédente :

$$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} = -AB \times AH$$

Or, dans le triangle AHC rectangle en H, on a d'après la trigonométrie de collège $\cos\left(\widehat{HAC}\right) = \frac{AH}{AC}$ et donc :

$$AH = AC \times \cos\left(\widehat{HAC}\right)$$

Ici, on remarque que $\widehat{HAC} = \pi - \widehat{BAC}$, et d'après la formule trigonométrique $\cos(\pi - x) = -\cos x$, on a :

$$\cos\left(\widehat{HAC}\right) = -\cos\left(\widehat{BAC}\right)$$

On a donc : $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} = -AB \times AC \times \left(-\cos\left(\widehat{BAC}\right)\right)$

$$\boxed{\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} = AB \times AC \times \cos\left(\widehat{BAC}\right)}$$

□

Exemple. ABC est triangle isocèle en A tel que $AB = 3$ et $\widehat{ABC} = \frac{\pi}{6}$. Calculer $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$.

6.1.4 Produit scalaire dans un repère orthonormé

Si l'on se place dans un repère orthonormé, on peut donner des coordonnées aux vecteurs. Le produit scalaire se calcule alors très simplement avec la formule suivante :

Propriété. *Dans un repère orthonormé, on considère les vecteurs* $\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ *et* $\vec{v}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$. *Alors :*

$$\boxed{\vec{u} \cdot \vec{v} = xx' + yy'}$$

Démonstration. *On sait que, pour tous vecteurs* $\vec{u}$ *et* $\vec{v}$, *on a :*

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \frac{1}{2}\left(\|\vec{u}+\vec{v}\|^2 - \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2\right)$$

Or, dans un repère orthonormé, la norme du vecteur $\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ *est donnée par :*

$$\|\vec{u}\| = \sqrt{x^2+y^2}$$

Ainsi, on a :

$$\|\vec{u}\|^2 = x^2+y^2$$

De même :

$$\|\vec{v}\|^2 = x'^2+y'^2$$

Et comme $\vec{u}+\vec{v}\begin{pmatrix} x+x' \\ y+y' \end{pmatrix}$, *alors :*

$$\begin{aligned} \|\vec{u}+\vec{v}\|^2 &= (x+x')^2+(y+y')^2 \\ &= x^2+2xx'+x'^2+y^2+2yy'+y'^2 \end{aligned}$$

Ainsi, l'expression de $\vec{u} \cdot \vec{v}$ *devient :*

$$\begin{aligned} \vec{u} \cdot \vec{v} &= \frac{1}{2}(x^2+2xx'+x'^2+y^2+2yy'+y'^2-(x^2+y^2)-(x'^2+y'^2)) \\ &= \frac{1}{2}(2xx'+2yy') \\ &= \mathbf{xx'+yy'} \end{aligned}$$

□

Exemple. Dans un repère orthonormé, on considère les vecteurs :

$$\vec{u}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \vec{v}\begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix} \qquad \vec{w}\begin{pmatrix} 4 \\ 0 \end{pmatrix}$$

On a :

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = 2\times(-1)+1\times 3 = -2+3 = 1 \qquad \boxed{\vec{u} \cdot \vec{v} = 1}$$

$$\vec{u} \cdot \vec{w} = 2\times 4+1\times 0 = 8+0 = 8 \qquad \boxed{\vec{u} \cdot \vec{w} = 8}$$

$$\vec{v} \cdot \vec{w} = -1\times 4+3\times 0 = -4+0 = -4 \qquad \boxed{\vec{v} \cdot \vec{w} = -4}$$

6.2 Propriétés du produit scalaire

6.2.1 Propriétés algébriques

Grâce aux formules précédentes, on peut calculer le produit scalaire de deux vecteurs dans quasiment toutes les situations. On peut également dégager des propriétés algébriques, comme les suivantes :

Propriété. *Soient $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ trois vecteurs du plan. Alors :*

1. $\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot \vec{u}$ *: le produit scalaire est* ***symétrique***
2. $\vec{u} \cdot (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{u} \cdot \vec{w}$ *: le produit scalaire est* ***compatible avec l'addition***
3. $(a\vec{u}) \cdot (b\vec{v}) = a \times b \times \vec{u} \cdot \vec{v}$ *: le produit scalaire est* ***compatible avec le produit***
4. $(\vec{u} + \vec{v})^2 = \|\vec{u}\|^2 + 2\vec{u} \cdot \vec{v} + \|\vec{v}\|^2$ *: c'est une* ***identité remarquable*** *pour le produit scalaire*

Un cas particulier où le produit scalaire est très facile à calculer, c'est lorsque les vecteurs sont colinéaires. Cette propriété se déduit facilement de la formule avec le cosinus, sachant que $\cos(0) = 1$ et $\cos \pi = -1$:

Propriété. *Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs du plan* ***colinéaires****.*

1. *Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont de même sens, alors $\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\|$*
2. *Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont de sens contraire, alors $\vec{u} \cdot \vec{v} = -\|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\|$*

Remarque. Un corollaire (un résultat qui découle immédiatement d'un autre) de cette propriété est que $\vec{u} \cdot \vec{u} = \|\vec{u}\|^2$.

6.2.2 Orthogonalité

Un second cas particulier est lorsque le produit scalaire est égal à 0.

Définition. Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs du plan.
On dit que $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont **orthogonaux** lorsque $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$. On note alors $\vec{u} \perp \vec{v}$.

Propriété. *Soient (d_1) et (d_2) deux droites du plan, de vecteurs directeurs respectifs $\vec{u}$ et $\vec{v}$. Alors :*

$$(d_1) \perp (d_2) \iff \vec{u} \cdot \vec{v} = 0$$

Exemple. Dans un repère orthonormé, on considère les points :

$$A(4\ ;\ 3) \quad B(2\ ;\ 0) \quad C(5\ ;\ -2) \quad D(0\ ;\ 2)$$

Les droites (AB) et (BC) sont-elles perpendiculaires ? et les droites (AC) et (AD) ?

6.3 Applications du produit scalaire

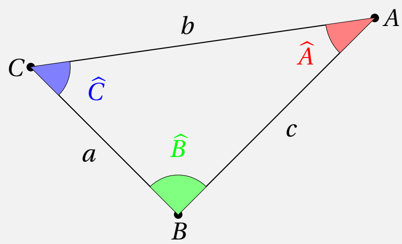
6.3.1 Formules d'Al Kashi

Propriété. *Soit ABC un triangle avec $a = BC$, $b = AC$ et $c = AB$. Alors :*

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \times \cos\left(\widehat{A}\right)$$

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \times \cos\left(\widehat{B}\right)$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \times \cos\left(\widehat{C}\right)$$



Remarque. Les formules d'Al Kashi sont une **généralisation du théorème de Pythagore** : si par exemple, on a $\widehat{A} = 90°$, on retrouve l'égalité $a^2 = b^2 + c^2$. Ces formules sont très utiles pour **calculer des angles et des longueurs** dans un triangle.

Démonstration. *On démontre la première égalité, les deux suivantes se démontrent de la même manière.*
Il suffit de calculer le produit scalaire $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$ de deux manières différentes :

1. *D'après la propriété énoncée au début du chapitre, on a :*

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \frac{1}{2}(AB^2 + AC^2 - BC^2)$$

Donc :

$$\boxed{\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \frac{1}{2}(c^2 + b^2 - a^2)}$$

2. *D'après la formule avec les angles, on a :*

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \|\overrightarrow{AB}\| \times \|\overrightarrow{AC}\| \times \cos\left(\widehat{A}\right)$$

D'où :

$$\boxed{\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = c \times b \times \cos \widehat{A}}$$

Ainsi, les deux produits scalaires étant égaux, on a donc :

$$\frac{1}{2}(c^2 + b^2 - a^2) = c \times b \times \cos \widehat{A}$$

$$c^2 + b^2 - a^2 = 2bc \cos \widehat{A}$$

$$\boxed{a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \widehat{A}}$$

□

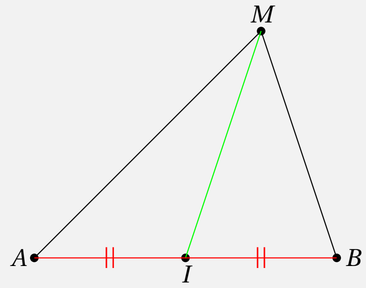
Exemple. Retour à l'exemple d'introduction.

Exemple. ABC est un triangle isocèle en A, tel que $AB = 3$ et $\widehat{BAC} = 120°$. Calculer BC.

6.3.2 Théorème de la médiane

Propriété. *Soient A, B et M trois points du plan. Soit I le milieu de $[AB]$. Alors :*

$$MA^2 + MB^2 = 2MI^2 + 2IA^2$$



Démonstration.

$$\begin{array}{rcl} MA^2 + MB^2 & = & \overrightarrow{MA}^2 + \overrightarrow{MB}^2 \\ & = & (\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IA})^2 + (\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IB})^2 \\ & = & \overrightarrow{MI}^2 + 2\overrightarrow{MI} \cdot \overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IA}^2 + \overrightarrow{MI}^2 + 2\overrightarrow{MI} \cdot \overrightarrow{IB} + \overrightarrow{IB}^2 \\ & = & MI^2 + IA^2 + MI^2 + IB^2 + 2\overrightarrow{MI} \cdot (\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB}) \end{array}$$

Or I est le milieu de $[AB]$, donc $\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} = \overrightarrow{0}$ et $IA = IB$, donc $IB^2 = IA^2$.
Ainsi :

$$MA^2 + MB^2 = 2MI^2 + 2IA^2$$

$\square$

Exemple. Soit $ABCD$ un parallélogramme de centre I, tel que $AB = 7$, $AD = 5$, $BD = 8$.
Calculer la longueur AC.