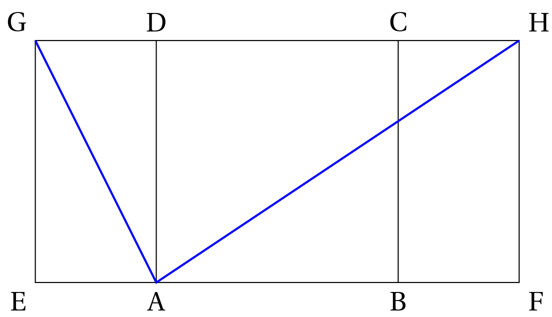
Devoir Libre n°3

Exercice 1. On considère la figure suivante, sur laquelle $ABCD$ est un carré de côté 4, et $AEGD$ et $BFHC$ sont des rectangles de largeur 2. On souhaite étudier la perpendicularité des droites (AG) et (AH) en calculant le produit scalaire $\overrightarrow{AG} \cdot \overrightarrow{AH}$.



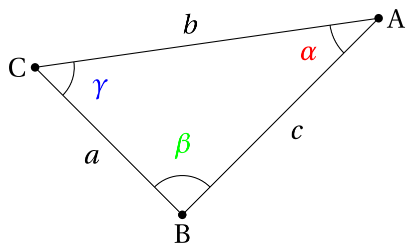
Partie A

Dans cette partie, on se propose de calculer de plusieurs façons différentes le produit scalaire $\overrightarrow{AH} \cdot \overrightarrow{AG}$.

1. (a) À l'aide d'un fameux théorème de géométrie, déterminer les longueurs AH et AG.
   (b) Calculer le produit scalaire $\overrightarrow{AG} \cdot \overrightarrow{AH}$ à l'aide d'une formule faisant intervenir les longueurs, et conclure sur la perpendicularité des droites (AG) et (AH).
2. Calculer le produit scalaire $\overrightarrow{AH} \cdot \overrightarrow{AG}$ en décomposant astucieusement les vecteurs $\overrightarrow{AH}$ et $\overrightarrow{AG}$.
3. On se place maintenant dans le repère orthonormé $\left(A; \frac{1}{4}\overrightarrow{AB}; \frac{1}{4}\overrightarrow{AD}\right)$.
   (a) Déterminer les coordonnées de tous les points dans ce repère.
   (b) Calculer alors d'une autre manière le produit scalaire $\overrightarrow{AG} \cdot \overrightarrow{AH}$.
4. En calculant $\overrightarrow{AG} \cdot \overrightarrow{AH}$ d'une autre manière, déterminer une mesure de l'angle $\widehat{HAG}$ à 0,1° près.
5. Soit M un point de la droite (AB) tel que $(GM) \perp (HM)$. Où se trouve le point M ?

Partie B

Dans cette partie, on démontre des formules permettant de calculer les mesures des angles d'un triangle à partir de ses longueurs, en utilisant les formules d'Al Kashi.



1. Rappeler les formules d'Al Kashi, en utilisant les notations présentes sur la figure ci-contre.
2. Déduire d'une des formules précédentes l'égalité :

$$\cos\alpha = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$$

3. En déduire deux formules analogues pour $\cos\beta$ et $\cos\gamma$.
4. **Application :** déterminer les mesures (à 0,1° près) des angles du triangle AGH de la figure ci-dessus.