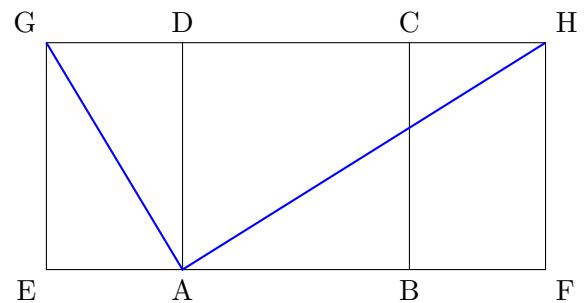


Devoir Libre : Produit Scalaire

On considère la figure suivante, sur laquelle $ABCD$ est un carré de côté 5, et $AEGD$ et $BFHC$ sont des rectangles de largeur 3. On souhaite étudier la perpendicularité des droites (AG) et (AH) en calculant le produit scalaire $\overrightarrow{AG} \cdot \overrightarrow{AH}$.



Partie A

Dans cette partie, on se propose de calculer de plusieurs façons différentes le produit scalaire $\overrightarrow{AG} \cdot \overrightarrow{AH}$.

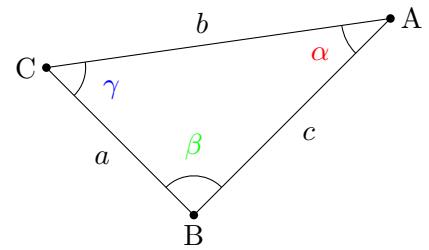
1. (a) À l'aide d'un fameux théorème de géométrie, déterminer les longueurs AH et AG .
 (b) Calculer le produit scalaire $\overrightarrow{AG} \cdot \overrightarrow{AH}$ à l'aide d'une formule faisant intervenir les longueurs.
 (c) Les droites (AG) et (AH) sont-elles perpendiculaires ?.
2. On se place maintenant dans le repère orthonormé $\left(A; \frac{1}{4}\overrightarrow{AB}; \frac{1}{4}\overrightarrow{AD}\right)$.
 (a) Déterminer les coordonnées de tous les points dans ce repère.
 (b) Calculer alors d'une autre manière le produit scalaire $\overrightarrow{AG} \cdot \overrightarrow{AH}$.
3. Calculer le produit scalaire $\overrightarrow{AG} \cdot \overrightarrow{AH}$ d'une troisième manière, en décomposant astucieusement les vecteurs \overrightarrow{AG} et \overrightarrow{AH} avec la relation de Chasles.

Partie B

Dans cette partie, on démontre des formules permettant de calculer les mesures des angles d'un triangle à partir de ses longueurs, en utilisant les formules d'Al Kashi.

1. Rappeler les formules d'Al Kashi, en utilisant les notations présentes sur la figure ci-contre.
2. Déduire d'une des formules précédentes l'égalité :

$$\cos \alpha = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$$



3. En déduire deux formules analogues pour $\cos \beta$ et $\cos \gamma$.
4. **Application** : déterminer les mesures (à 0,1° près) des angles du triangle AGH de la **partie A**.

Partie C

Peut-on trouver un point M sur (AB) tel que GHM soit rectangle en M ?

(on pourra se placer dans le repère précédent et poser $M(t;0)$, ou simplement utiliser un instrument de géométrie...)