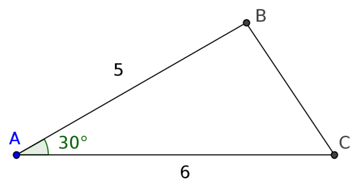
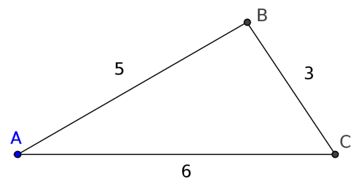
Exercices : Produit scalaire

Exercice 1. Dans chacun des cas suivants, déterminer le produit scalaire $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$ à l'aide de l'expression la plus adaptée.

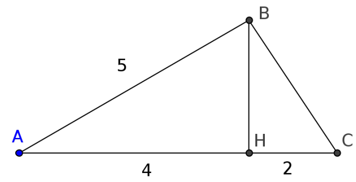
1.



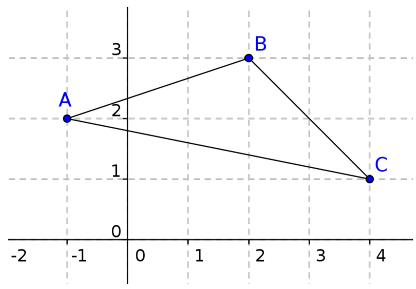
2.



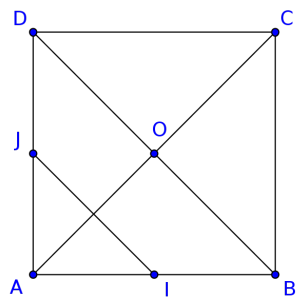
3.



4.



Dans les exercices 2 et 3, on considère un carré $ABCD$ de côté 1, de centre O, ainsi que les points I et J milieux respectifs de $[AB]$ et $[AD]$.



Exercice 2. Arpès avoir déterminé les longueurs AC, DB et IJ, calculer les produits scalaires suivants avec la méthode de votre choix (sans repère) :

1. $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$
2. $\overrightarrow{CO} \cdot \overrightarrow{CB}$
3. $\overrightarrow{IB} \cdot \overrightarrow{IJ}$
4. $\overrightarrow{AO} \cdot \overrightarrow{BC}$
5. $\overrightarrow{IJ} \cdot \overrightarrow{BC}$
6. $\overrightarrow{IC} \cdot \overrightarrow{ID}$

Exercice 3. On souhaite maintenant calculer des produits scalaires en se plaçant dans un repère orthonormé.

1. Déterminer, dans le repère orthonormé $(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD})$, les coordonnées de chacun des points de la figure ci-dessus.
2. Calculer les produits scalaires suivants :

(a) $\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{AC}$ (b) $\overrightarrow{IJ} \cdot \overrightarrow{AC}$ (c) $\overrightarrow{BJ} \cdot \overrightarrow{CA}$ (d) $\overrightarrow{IO} \cdot \overrightarrow{BO}$

Exercice 4. Dans un repère orthonormé, on considère les points :

$$A\,(1\ ;\ 2) \qquad B\,(3\ ;\ -1) \qquad C\,(5\ ;\ 4)$$

1. Calculer le produit scalaire $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$.
2. À l'aide d'une formule du produit scalaire, déterminer la valeur exacte de $\cos(\widehat{BAC})$.
3. En déduire la valeur approchée, au degré près, de l'angle $\widehat{BAC}$.
4. Calculer de façon analogue une valeur approchée de la mesure des angles $\widehat{ABC}$ et $\widehat{ACB}$.

Exercice 5. ABC est un triangle isocèle en A, tel que $AB = 3$ et $BC = 3\sqrt{3}$.
En calculant le produit scalaire $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$ de deux façons différentes, déterminer la valeur exacte de $\widehat{BAC}$.

Orthogonalité

Exercice 6. Parmi les vecteurs suivants, déterminer lesquels sont orthogonaux :

$$\overrightarrow{u}\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix} \quad \overrightarrow{v}\begin{pmatrix}3\\0\end{pmatrix} \quad \overrightarrow{w}\begin{pmatrix}-2\\1\end{pmatrix} \quad \overrightarrow{q}\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix} \quad \overrightarrow{r}\begin{pmatrix}4\\0\end{pmatrix} \quad \overrightarrow{s}\begin{pmatrix}0\\4\end{pmatrix}$$

Exercice 7. Dans un repère orthonormé, on considère les points :

$$A\,(-3\ ;\ 8) \qquad B\,(-1\ ;\ 3) \qquad C\,(0\ ;\ 7) \qquad D\,(-5\ ;\ 5)$$

Démontrer que les droites (AB) et (CD) sont perpendiculaires.

Exercice 8. $ABCD$ est un carré, I est le milieu de $[AD]$ et J est le milieu de $[CD]$.
Démontrer que $(IB)\perp(AJ)$, de deux façons différentes.

Exercice 9. ABC est un triangle rectangle en A. H est le projeté orthogonal de A sur (BC). I et J sont les milieux respectifs de $[AB]$ et $[AC]$.
Démontrer que $(HI)\perp(HJ)$.

Al-Kashi

Exercice 10. À l'aide des formules d'Al-Kashi, déterminer la valeur de BC dans les cas suivants :

1. ABC est un triangle avec $AB = 3$, $AC = 4$ et $\widehat{BAC} = \frac{\pi}{3}$.
2. Le triangle DEF est isocèle en E, $EF = 4$ et $\widehat{EFD} = \frac{5\pi}{12}$.
3. $ABCD$ est un quadrilatère tel que $AB = \sqrt{3}$, $AD = 2$, $DC = 3$, $\widehat{BAD} = \frac{\pi}{6}$ et $\widehat{BDC} = \frac{\pi}{3}$.

Exercice 11. Soit ABC un triangle tel que $AB = 3$, $AC = 5$ et $\widehat{BAC} = \frac{\pi}{6}$.
Déterminer une mesure approchée à 0,1 ° près des angles $\widehat{ABC}$ et $\widehat{BCA}$.