Exercices : Suites Arithmétiques et Géométriques

Exercice 1. Indiquer en justifiant quelles sont les suites **arithmétiques** parmi les suivantes :

1. $\begin{cases} u_0 = -7 \\ u_{n+1} = -u_n + 3 \end{cases}$

2. $\begin{cases} v_0 = 8 \\ v_{n+1} = 1 + v_n \end{cases}$

3. $\begin{cases} w_0 = 0 \\ w_{n+1} = 3w_n - 4 \end{cases}$

4. $\begin{cases} r_0 = 2,3 \\ r_{n+1} = r_n - 0,15 \end{cases}$

5. $\begin{cases} s_0 = 0 \\ s_{n+1} = s_n + 0,5n \end{cases}$

6. $\begin{cases} t_0 = \pi \\ t_{n+1} = t_n \end{cases}$

Exercice 2. Même exercice :

1. $u_n = n - 3$
2. $v_n = (3n+1)^2$
3. $w_n = 2 - \frac{1}{3}n$
4. $r_n = 1,5^n$
5. $s_n = -37n$

Exercice 3. Soit (a_n) une suite arithmétique de raison $r = 7$, et telle que $a_5 = 9$. Calculer a_{17}.

Exercice 4. Soit (b_n) une suite arithmétique telle que $b_1 = 6,2$ et $b_5 = 8,8$. Déterminer la raison r de cette suite, et calculer b_8.

Exercice 5. Soit (c_n) une suite arithmétique de premier terme $c_0 = 4,1$ et de raison $r = -0,3$.

1. Déterminer l'indice n_0 pour lequel $c_{n_0} = 1,7$.
2. Déterminer le plus petit entier n_1 tel que $c_n < 0$ pour tout entier $n \geqslant n_1$.

Exercice 6. Jean a 357 € dans sa tirelire. Chaque semaine, il y dépose 6 € supplémentaires.
On note S_n la somme d'argent dans la tirelire de Jean au bout de n semaines.

1. Justifier que la suite (S_n) est arithmétique. Déterminer l'expression de S_n en fonction de n.
2. De quelle somme d'argent disposera Jean au bout d'un an d'économies ?
3. Combien de semaines devra-t-il attendre pour disposer de plus de 1000 € ?

Exercice 7. En 2020, le loyer d'un appartement est de 12000 € pour l'année.
Chaque année, le propriétaire augmente ce loyer de 150€. On note u_n le loyer pour l'année $2020 + n$.

1. Déterminer u_0, u_1 et u_2.
2. Que peut-on dire de la suite (u_n) ? Donner l'expression de u_n en fonction de n.
3. Déterminer le loyer pour l'année 2030.
4. À partir de quelle année le salaire dépassera-t-il 14000 € annuels ?
5. Si le propriétaire loue son appartement de 2020 à 2030 inclus, quelle somme d'argent aura-t-il gagné ?

Exercice 8. Calculer les sommes suivantes :

$A = 1 + 2 + 3 + \ldots + 150$ $B = 17 + 18 + 19 + \ldots + 257$ $C = 2 + 4 + 6 + \ldots + 1000$ $D = 12 + 22 + 32 + \ldots + 652$

Exercice 9. ★ Soit (u_n) la suite définie par $u_0 \in \mathbb{R}$ et pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = u_n + an$, où a est un réel non nul.

1. On pose $v_n = u_{n+1} - u_n$. Justifier que (v_n) est arithmétique. Préciser sa raison et son premier terme.
2. Soit $S_n = v_0 + v_1 + v_2 + \ldots + v_n$. Démontrer que $S_n = \frac{an(n+1)}{2}$, puis justifier que $S_n = u_{n+1} - u_0$, quel que soit $n \in \mathbb{N}$.
   En déduire l'expression de u_n en fonction de n.
3. **Application :** soit u_n la suite définie par $u_0 = 3$ et $u_{n+1} = u_n - 2n$. Déterminer l'expression de u_n en fonction de n.

Exercice 10. Indiquer en justifiant quelles sont les suites **géométriques** parmi les suivantes :

1. $\begin{cases} u_0 = 8 \\ u_{n+1} = 63u_n + 2 \end{cases}$

2. $\begin{cases} v_0 = -2,4 \\ v_{n+1} = \frac{2}{7}v_n \end{cases}$

3. $\begin{cases} w_1 = 0 \\ w_{n+1} = n \times w_n \end{cases}$

4. $\begin{cases} r_0 = 2 \\ r_{n+1} = \pi - u_n \end{cases}$

5. $\begin{cases} s_0 = -1,23 \\ s_{n+1} = \frac{s_n}{3} \end{cases}$

6. $\begin{cases} t_0 = -1 \\ t_{n+1} = -t_n \end{cases}$

Exercice 11. Même exercice :

1. $u_n = 2^n$
2. $v_n = n^2$
3. $w_n = 5 \times 6^n$
4. $r_n = (-3)^n \times 4$
5. $s_n = n \times 5^n$

Exercice 12. Soit (a_n) une suite géométrique de raison $q = 1,5$, et telle que $a_2 = 2$. Calculer a_5.

Exercice 13. Soit (b_n) une suite géométrique de raison q telle que $b_2 = 0,135$ et $b_5 = 5$. Déterminer q, puis calculer b_1 et b_6.

Exercice 14. Soit (c_n) une suite géométrique de premier terme $c_0 = 5$ et de raison $q = 1,1$.

1. Quel est le sens de variations de la suite (c_n) ?
2. Déterminer l'expression de c_n en fonction de n.
3. Déterminer à l'aide de la calculatrice le plus petit entier n_0 tel que $c_n \geqslant 10$ pour tout $n \geqslant n_0$.

Exercice 15. Un seau exposé au soleil contient quatre litres d'eau. Chaque jour, 12% de l'eau contenue dans le seau s'évapore. On note u_n la quantité d'eau, en litres, contenue dans le seau après n jours.

1. Déterminer u_0, u_1 et u_2.
2. Quelle relation de récurrence lie u_{n+1} à u_n ? Que peut-on en déduire pour la suite (u_n) ?
3. Déterminer l'expression de u_n en fonction de n, puis calculer la quantité d'eau restante au bout de 10 jours.

Exercice 16. En 2020, le coût d'une assurance automobile est de 1000 € annuels.
Si l'assuré n'a pas d'accident responsable dans l'année, le tarif diminue de 5%, et ce jusqu'à un tarif plancher de 500 € .
On suppose qu'un assuré n'a jamais d'accident responsable, et on note u_n le tarif de l'assurance à l'année $2020 + n$.

1. Déterminer u_0, u_1 et u_2.
2. Que peut-on dire de la suite (u_n) ? Donner l'expression de u_n en fonction de n.
3. Quel sera le tarif pour cet assuré en 2030 ?
4. Déterminer à l'aide de la calculatrice l'année à partir de laquelle l'assuré aura atteint le tarif plancher de 500 € .
5. Déterminer la somme totale payée par l'assuré pour la période 2020 à 2030 (inclus).

Exercice 17. Calculer les sommes suivantes :

$$A = 1 + 2 + 2^2 + \ldots + 2^{10} \qquad B = 1 + 3 + 9 + 27 + \ldots + 59049 \qquad C = 25 + 50 + \ldots + 3200 + 6400$$

Exercice 18. ★ Une puce se déplace le long d'un segment $[AB]$ de longueur 1. Initialement, elle se trouve en A, et à chaque saut, elle parcourt la moitié de la distance la séparant du point B. On note d_n la longueur du n-ième saut.

1. Déterminer d_1, d_2 et d_3.
2. Que peut-on dire de la suite (d_n) ? Exprimer alors d_n en fonction de n.
3. On pose $D_n = d_1 + d_2 + d_3 + \ldots + d_n$.
   (a) Que représente le nombre D_n ?
   (b) Calculer D_n en fonction de n.
   (c) La suite (D_n) est-elle convergente ? Interpréter le résultat.

Exercice 19. ★ Soit (u_n) la suite définie pour tout entier naturel n par :

$$\left\{\begin{array}{rcl} u_0 & = & 1 \\ u_{n+1} & = & 3u_n - 1 \end{array}\right.$$

1. Calculer u_1, u_2 et u_3.
2. La suite (u_n) est-elle arithmétique ? géométrique ?
3. On pose $v_n = u_n - \frac{1}{2}$.
   (a) Démontrer que (v_n) est géométrique. Préciser son premier terme et sa raison.
   (b) Exprimer v_n en fonction de n.
   (c) En déduire l'expression de u_n en fonction de n.
4. La suite (u_n) semble-t-elle convergente ou divergente ?
5. On souhaite déterminer le plus petit entier naturel n tel que $u_n \geqslant 10\,000$. Pour cela, on dispose du programme Python ci-contre.

   Compléter ce programme afin de répondre au problème posé.

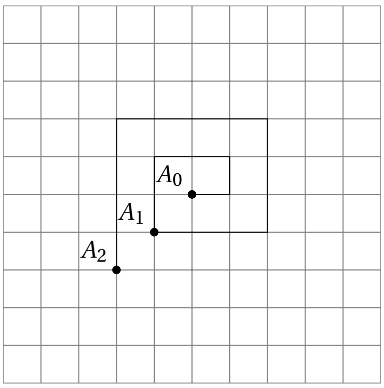
```python
u = 1
n = 0

while .... :
    u = ....
    n = ....

print(....)
```

6. ★★ Calculer $\sum_{k=0}^{20} u_k = u_0 + u_1 + \ldots + u_{20}$.

Exercice 20. ★ Une colonie de 3000 bactéries évolue ainsi : tous les jours, 20% des bactéries meurent, et 200 nouvelles bactéries apparaissent. On note u_n le nombre de bactéries dans la colonie au bout de n jours. On a donc $u_0 = 3000$.

1. Calculer u_1 et u_2.
2. Déterminer la relation de récurrence liant u_{n+1} et u_n.
3. À l'aide de la calculatrice, étudier la convergence de la suite (u_n).
4. Pour tout entier naturel n, on pose $v_n = u_n - 1000$.
   (a) Démontrer que (v_n) est géométrique de raison $q = 0,8$.
   (b) Déterminer l'expression de v_n en fonction de n, puis celle de u_n.
   (c) La suite (u_n) est-elle convergente ? Si oui, de quel nombre se rapproche-t-elle ?

Exercice 21. On considère la spirale suivante, et on note L_n la longueur de la ligne brisée entre les points A_0 et A_n.



1. Déterminer L_1 et L_2.
2. Poursuivre le dessin jusqu'au point A_4, et calculer L_3 et L_4.
3. ★★ Quelle serait la longueur de la spirale si l'on continuait le dessin jusqu'au point A_{100} ?