Exercices : Fonctions dérivées

Exercice 1. Calculer les dérivées des fonctions suivantes, en précisant les ensembles de définition de f et f' :

1. $f(x) = x^2 + x + 1$
2. $g(x) = x^3 - x^2 + 3$
3. $h(x) = x^3 + 4x^2 - 3x + 6$
4. $i(x) = \sqrt{x} - 1 - \frac{1}{x}$
5. $r(x) = 3x^2 + 6x - 1$
6. $s(x) = 12x^2 - x^4 + \frac{2}{x}$
7. $t(x) = \frac{2x}{5} + \frac{x^2}{2}$
8. $u(x) = \frac{1}{3}x - \frac{3x^4}{7} + \frac{2}{3x}$
9. $v(x) = \frac{x^4 - 3x^2 + 6x}{4}$

Exercice 2. Même exercice :

1. $f(x) = x^3(1 - x^4)$
2. $f(x) = x\sqrt{x}$
3. $f(x) = x^2\sqrt{x}$
4. $f(x) = \frac{1}{x^2+1}$
5. $f(x) = \frac{2}{x-1}$
6. $f(x) = \frac{x-1}{x+1}$
7. $f(x) = \frac{x}{x^2+x+1}$
8. $f(x) = \frac{x^2-1}{x^2+1}$
9. $f(x) = \frac{1-\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}$

Exercice 3. Dans chaque cas, calculer $f'(x)$ et $f''(x)$ (dérivée seconde : dérivée de la dérivée!) :

1. $f(x) = x^2 - 2x$
2. $f(x) = x^3 - 7x^2 + 1$
3. $f(x) = 2\sqrt{x}$
4. $f(x) = \frac{1}{1+x}$

Exercice 4. Pour chaque fonction suivante, déterminer en quel(s) point(s) sa courbe admet une tangente horizontale :

1. $f(x) = x^2 + 4x - 7$
2. $g(x) = \sqrt{x+1}$
3. $h(x) = x^3 - 3x$
4. $r(x) = x^4 - 4x^2 + 1$
5. $s(x) = \frac{1}{x-2}$
6. $t(x) = \frac{1+x}{1+x^2}$

Exercice 5. Déterminer l'équation réduite de la tangente au point a pour chacune des fonctions suivantes :

1. $f(x) = x^2 - x - 1$, $a = 1$
2. $g(x) = 2x^4 - x^2 + 1$, $a = 1$
3. $h(x) = x + \frac{1}{x}$, $a = -2$
4. $t(x) = \frac{x^2-1}{x^2+1}$, $a = 2$

Exercice 6. On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^3$.

1. Déterminer l'équation réduite de T_1, tangente à $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse $a = 1$.
2. Étudier la position relative de $\mathscr{C}_f$ et T_1.

Exercice 7. Soit $f(x) = \frac{2x}{1-x}$. Existe-t-il une tangente à $\mathscr{C}_f$ passant par le point $A(-2; -1)$?

Exercice 8. ***Vrai ou faux?***
Pour tout réel x, on pose $f(x) = (3x^2 + 5)(3 - 2x)$.

1. Il existe au moins un nombre réel x tel que $f'(x) = 0$.
2. Si $g(x) = -6x^3 + 9x^2 - 10x + 35$, alors $g'(x) = f'(x)$, pour tout réel x.

Exercice 9. Dans chaque cas, déterminer une expression de la fonction f dont la dérivée est donnée par :

1. $f'(x) = 2x+1$
2. $f'(x) = 3-6x$
3. $f'(x) = 6x^5 - 4x^3$
4. $f'(x) = x^2 + x + 1$
5. $f'(x) = 1 - \frac{1}{x^2}$

Exercice 10. Soient f et g les fonctions définies sur $\mathbb{R} \setminus \{2\}$ par :

$$f(x) = \frac{3x-1}{x-2} \qquad g(x) = \frac{5}{x-2}$$

1. Calculer $f'(x)$ et $g'(x)$ pour $x \neq 2$. Que remarque-t-on ?
2. Existe-t-il d'autres fonctions dont la dérivée est égale à f' ?

Exercice 11. f est une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$, dont la dérivée est donnée par $f'(x) = 3+4x$.
On sait de plus que $f(0) = 3$. Déterminer l'expression de $f(x)$.

Exercice 12. g est une fonction constante égale à 10. f est la fonction vérifiant les 3 conditions suivantes :

- $f'' = g$
- $f'(0) = 5$
- $f(1) = 3$

Déterminer l'expression de $f(x)$.