Chapitre 9 : La fonction exponentielle

I Généralités

Théorème. *Il existe une unique fonction f dérivable sur $\mathbb{R}$ et vérifiant :*

$$f' = f \qquad f(0) = 1$$

*On la nomme **fonction exponentielle**, et on la note* exp.

L'existence et l'unicité de cette fonction est admise.
Nous pouvons cependant donner une représentation graphique approchée avec la **méthode d'Euler**. On rappelle que si f est une fonction dérivable en a, le nombre dérivé en a, $f'(a)$, se calcule ainsi (par définition) :

$$f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

Ceci signifie que pour h proche de zéro, on a :

$$f'(a) \simeq \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

Ou encore, après quelques manipulations :

$$f(a+h) \simeq f(a) + hf'(a)$$

Grâce à cette égalité, on peut calculer une valeur approchée de $f(a+h)$, connaissant les valeurs de $f(a)$ et de $f'(a)$.
En particulier, pour une fonction f vérifiant $f' = f$, on obtient :

$$f(a+h) \simeq f(a) + hf(a)$$

Ainsi :

$$\boxed{f(a+h) \simeq f(a)\,(1+h)}$$

En partant de $f(0) = 1$ (qui est la condition initiale fixée), on obtient (en remplaçant a par 0) :

$$f(h) \simeq 1 + h$$

En remplaçant a par h, on obtient :

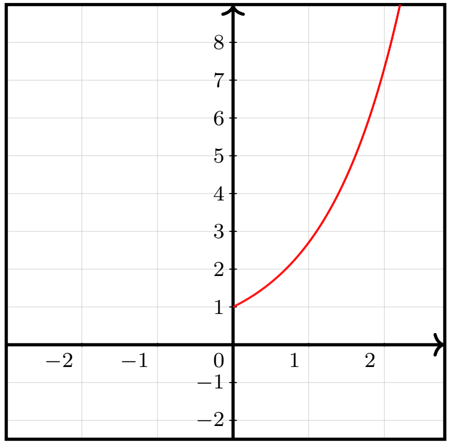
$$f(2h) \simeq f(h) \times (1+h) = (1+h)^2$$

Puis a par $2h$:

$$f(3h) \simeq f(2h) \times (1+h) = (1+h)^3$$

On peut ainsi construire la fonction f de proche en proche, à condition de prendre une valeur de h suffisamment petite. Pour $h = 0,01$, on obtient la courbe suivante :

x	$f(x)$
0	1
0,01	1,01
0,02	1,0201
0,03	1,030301
0,04	1,04060401
...	...

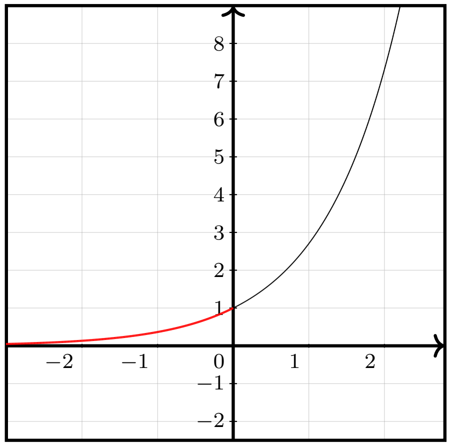


La méthode d'Euler fonctionne aussi « dans l'autre sens », c'est à dire avec un h négatif, ce qui nous permet d'avoir un tracé approximatif de la courbe de f pour $x < 0$.

$$f(a-h) \simeq f(a)\,(1-h)$$

Avec cette formule, on peut compléter la courbe précédente :

x	$f(x)$
0	1
-0,01	0.99
-0,02	0,9801
-0,03	0,970299
-0,04	0,96059601
...	...



On vient d'obtenir la courbe représentative (mais approximative) de la **fonction exponentielle**, vérifiant $f' = f$ et $f(0) = 1$.

Précédemment, nous avons vu que :

$$f(h) \simeq 1 + h \qquad f(2h) \simeq (1+h)^2 \qquad f(3h) \simeq (1+h)^3$$

Il est facile de conjecturer la relation suivante, qui n'est pas vraiment une égalité (on cumule les erreurs) :

$$f(n \times h) \simeq (1+h)^n$$

En particulier, si n est grand, on peut poser $h = \frac{1}{n}$ (qui sera ainsi proche de zéro) et obtenir :

$$f(1) \simeq \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

On peut démontrer que la suite définie par $u_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ est convergente (plus n est grand, plus elle se rapproche d'un certain nombre). On se contentera, en classe de première, de calculer u_n pour de grandes valeurs de n et de conjecturer qu'elle converge vers un nombre environ égal à 2,718.

Ce nombre particulier, dont la valeur exacte n'est pas calculable comme π ou $\sqrt{2}$, est appelé **nombre d'Euler** : on le note e.

Propriété. $\exp(1) = e$, *où* $e \simeq 2,718$. ☆

Grâce à la courbe obtenue avec la méthode d'Euler, on peut conjecturer plusieurs propriétés de la fonction exponentielle :

- La fonction exponentielle est **strictement positive sur** $\mathbb{R}$
- La fonction exponentielle est **strictement croissante sur** $\mathbb{R}$

Ces deux propriétés peuvent se démontrer, mais nécessitent de prouver quelques résultats intermédiaires.

Propriété. *Soit f une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ et vérifiant, pour tout réel x, $f'(x) = f(x)$ et $f(0) = 1$.*
Alors, pour tout réel x :

$$f(x)f(-x) = 1$$

Démonstration.
Posons $\varphi(x) = f(x)f(-x)$. φ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et :

$$\varphi'(x) = f'(x)f(-x) - f(x)f'(-x)$$

Or pour tout réel x, $f'(x) = f(x)$ donc :

$$\varphi'(x) = f(x)f(-x) - f(x)f'(-x) = 0$$

La fonction φ est donc constante sur $\mathbb{R}$, et :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \varphi(x) = \varphi(0) = f(0) \times f(0) = 1$$

On a donc :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \varphi(x) = 1 \implies \forall x \in \mathbb{R},\ f(x)f(-x) = 1$$

□

Cette propriété a deux conséquences immédiates sur la fonction exponentielle (qui vérifie les conditions $f' = f$ et $f(0) = 1$) :

Propriété. ☆

- *La fonction exponentielle ne s'annule pas sur* $\mathbb{R}$
- *Pour tout réel* x, $\exp(-x) = \dfrac{1}{\exp(x)}$

Démonstration. *D'après la propriété précédente, on a :*

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \exp(x) \times \exp(-x) = 1$$

Ainsi, le produit étant toujours égal à 1, il est impossible que $\exp(x) = 0$ *(sinon le produit serait nul). De plus, on obtient immédiatement l'égalité :*

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \exp(-x) = \frac{1}{\exp(x)}$$

$\square$

On peut alors démontrer une propriété très importante sur la fonction exponentielle :

Propriété. *Pour tous réels* x *et* y*, on a :* ☆

$$\exp(x+y) = \exp(x) \times \exp(y)$$

Démonstration. *Pour démontrer cette propriété, il ¡¡ suffit ¿¿ de considérer la fonction* f *définie sur* $\mathbb{R}$ *par :*

$$f(x) = \frac{\exp(x+y)}{\exp(x)}$$

où y *désigne un nombre réel quelconque. Vis à vis de* x, y *est une constante (il ne dépend pas de* x*). On peut donc dériver la fonction* f *en utilisant les résultats du cours sur la dérivation (dérivée d'un quotient et d'une composée), et en utilisant le fait remarquable que* $\exp' = \exp$ *(par définition de l'exponentielle) :*

$$f = \frac{u}{v} \qquad u = \exp(x+y) \quad u' = \exp(x+y) \qquad v = \exp(x) \quad v' = \exp(x)$$

$$f'(x) = \frac{\exp(x+y) \times \exp(x) - \exp(x+y) \times \exp(x)}{\exp(x)^2} = 0$$

La dérivée de f *étant nulle sur* $\mathbb{R}$*, cela signifie que la fonction* f *est constante sur* $\mathbb{R}$*, et ainsi, comme* $\exp(0) = 1$ *:*

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = f(0) \implies \frac{\exp(x+y)}{\exp(x)} = \frac{\exp(0+y)}{\exp(0)} = \exp(y)$$

En multipliant par $\exp(x)$*, il vient :*

$$\boxed{\forall x, y \in \mathbb{R}, \quad \exp(x+y) = \exp(x) \times \exp(y)}$$

$\square$

On déduit de cette propriété la stricte positivité de l'exponentielle :

Propriété. *La fonction exponentielle est* ***strictement positive sur*** $\mathbb{R}$. ☆

Démonstration. *On utilise astucieusement la propriété précédente :*

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \exp(x) = \exp\left(\frac{x}{2} + \frac{x}{2}\right) = \exp\left(\frac{x}{2}\right) \times \exp\left(\frac{x}{2}\right) = \left(\exp\left(\frac{x}{2}\right)\right)^2 \geqslant 0$$

De plus, nous avons vu que la fonction exponentielle ne s'annulait pas sur $\mathbb{R}$*. On a donc :*

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \exp(x) > 0$$

$\square$

Propriété. *La fonction exponentielle est* ***strictement croissante sur*** $\mathbb{R}$. ☆

x	$-\infty$	0	1	$+\infty$
$x \mapsto e^x$	↗	1	e	↗

Démonstration. *Cela découle du fait que* $\exp' = \exp$ *et* $\exp > 0$*. La dérivée de la fonction exponentielle étant une fonction strictement positive sur* $\mathbb{R}$*, la fonction exponentielle est donc strictement croissante sur* $\mathbb{R}$*.* $\square$

Conséquences

Pour tous nombres réels a et b :

$$\exp(a) = \exp(b) \iff a = b \qquad \exp(a) < \exp(b) \iff a < b$$

Propriété. *Pour tous réels x et y, on a :*

$$\exp(x - y) = \frac{\exp(x)}{\exp(y)}$$

Démonstration. *On combine les propriétés précédentes :*

$$\exp(x - y) = \exp(x + (-y)) = \exp(x) \times \exp(-y) = \exp(x) \times \frac{1}{\exp(y)} = \frac{\exp(x)}{\exp(y)}$$

□

II La notation e^x

On rappelle que $\exp(1) = e$, où $e \simeq 2,718$.
À l'aide de la formule $\exp(x + y) = \exp(x) \times \exp(y)$, on obtient :

$$\exp(2) = \exp(1 + 1) = \exp(1) \times \exp(1) = e \times e = e^2$$

$$\exp(3) = \exp(2 + 1) = \exp(2) \times \exp(1) = e^2 \times e = e^3$$

Cela nous incite à poser, **par convention** et pour tout réel x :

$$\boxed{\exp(x) = e^x}$$

Cette notation est légitime car la formule $\exp(x + y) = \exp(x) \times \exp(y)$ devient $e^{x+y} = e^x \times e^y$, ce qui est conforme à l'usage d'une notation puissance.

Conséquences

Avec cette nouvelle notation, les propriétés précédentes s'écrivent :

$$e^0 = 1 \qquad e^x > 0 \qquad e^{x+y} = e^x \times e^y \qquad e^{-x} = \frac{1}{e^x}$$

III Fonctions exponentielles $x \mapsto e^{kx}$

Propriété. *Soit $k \in \mathbb{R}$. La fonction f_k définie sur $\mathbb{R}$ par $f_k(x) = e^{kx}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et :*

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f_k'(x) = ke^{kx}$$

Démonstration. *Nous admettrons cette propriété.* □

Remarque. La fonction f_k vérifie l'égalité $f_k' = k \times f_k$.

Exemple. Soient $f(x) = e^{4x}$ et $g(x) = e^{-3x}$. Alors on a :

$$f'(x) = 4e^{4x} \qquad g'(x) = -3e^{-3x}$$

Comme $e^{4x} > 0$, alors $4e^{4x} > 0$, et donc $f'(x) > 0$: la fonction f est donc strictement croissante sur $\mathbb{R}$.
De même, $e^{-3x} > 0$, donc $-3e^{-3x} < 0$, et donc $g'(x) < 0$: la fonction g est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$.

Propriété. *La fonction f_k définie sur $\mathbb{R}$ par $f_k(x) = e^{kx}$ est :*

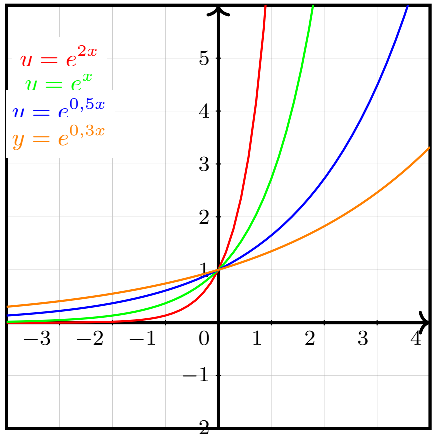
- ***strictement croissante** sur $\mathbb{R}$ si $k > 0$*
- ***strictement décroissante** sur $\mathbb{R}$ si $k < 0$*
- ***constante** sur $\mathbb{R}$ si $k = 0$*

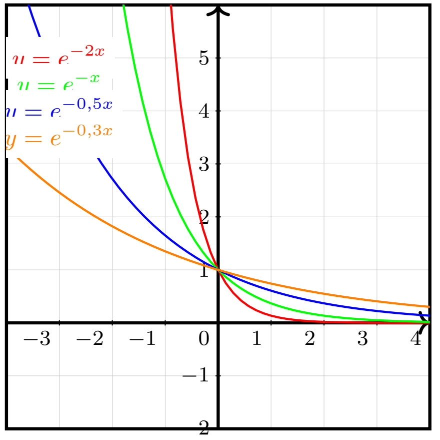
Démonstration. *D'après la propriété précédente, on a :*

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f_k'(x) = ke^{kx}$$

Or, pour tout réel x, $e^{kx} > 0$, donc le signe de $f_k'(x)$ dépend uniquement du signe de k. □

Exemple. Quelques représentations graphiques, pour $k > 0$ et $k < 0$:





Propriété. *Soient k et p deux réels. La fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = e^{kx+p}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et :*

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f'(x) = ke^{kx+p}$$

Exemple. Soit $f(x) = e^{4x-2}$. Alors $f'(x) = 4e^{4x-2}$.

Démonstration. *Il suffit de remarquer que :*

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad e^{kx+p} = e^{kx} \times e^{p}$$

e^p étant constant (il ne dépend pas de x), on a donc :

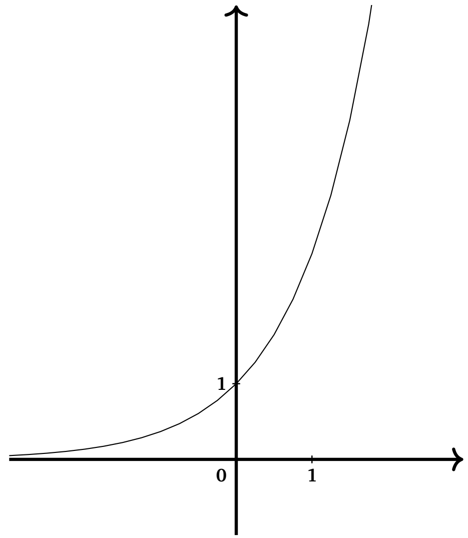
$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f'(x) = k \times e^{kx} \times e^{p} = k \times e^{kx+p}$$

$\square$

Résumé : la Fonction Exponentielle

La **fonction exponentielle**, notée $\exp$, est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$, à valeurs dans $\mathbb{R}_+^*$.
Elle est **strictement croissante** sur $\mathbb{R}$, vérifie :

- $\exp(0) = 1$
- $\forall x \in \mathbb{R},\ \exp'(x) = \exp(x)$
- $\forall x \in \mathbb{R},\ \exp(x) > 0$



x	$-\infty$	0	1	$+\infty$
$x \mapsto e^x$		1	e	

Notations :

- $\exp(1) = e$
- $\exp(x) = e^x$

Propriétés algébriques :

- $e^{x+y} = e^x \times e^y$
- $e^{-x} = \dfrac{1}{e^x}$
- $e^{x-y} = \dfrac{e^x}{e^y}$

Équations, inéquations :

$$e^a = e^b \iff a = b \qquad\qquad e^a < e^b \iff a < b$$

À retenir :

- $e \simeq 2,718$
- Le terme ¡¡ fonction exponentielle ¿¿ vient de l'extrême rapidité de croissance de la fonction :

$$e \simeq 2,718 \qquad e^2 \simeq 7,389 \qquad e^{10} \simeq 22\,026,476 \qquad e^{20} \simeq 485\,165\,195$$

Fonctions exponentielles

$$f_k(x) = e^{kx} \qquad f_k'(x) = ke^{kx}$$