BACCALAURÉAT BLANC

ÉPREUVE D'ENSEIGNEMENT DE SPÉCIALITÉ

SESSION 2026

MATHÉMATIQUES

JOUR 2

Durée de l'épreuve : **4 heures**

L'usage de la calculatrice avec mode examen actif est autorisé.

Dès que ce sujet vous est remis, assurez-vous qu'il est complet.
Ce sujet comporte 6 pages numérotées de 1/6 à 6/6.

Le candidat traite les 4 exercices proposés.

Le candidat est invité à faire figurer sur la copie toute trace de recherche, même incomplète ou non fructueuse, qu'il aura développée.

La qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements seront prises en compte dans l'appréciation de la copie. Les traces de recherche, même incomplètes ou infructueuses, seront valorisées.

EXERCICE 1 (5 points)

Dans cet exercice, les résultats seront arrondis si besoin à 10^{-4} *près.*

Un musée propose deux types de billets :

- un billet plein tarif;
- un billet à tarif réduit.

Pour entrer, un visiteur peut acheter son billet au guichet ou via le site internet. On sait que :

- 35% des visiteurs achètent un billet à tarif réduit;
- 55% des visiteurs achètent leur billet via le site internet;
- parmi les visiteurs à tarif réduit, 40% achètent leur billet via le site internet.

On choisit un visiteur au hasard. On note :

R : « le visiteur achète un billet à tarif réduit » I : « le visiteur achète son billet via internet »

Les événements contraires sont notés $\overline{R}$ et $\overline{I}$.

Partie A

1. À partir des données de l'énoncé, donner **sans calcul** :

$$p(R) \quad p(I) \quad p_R(I)$$

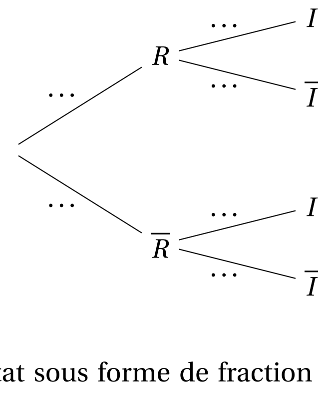
2. **a)** Calculer $p(R \cap I)$. Interpréter le résultat.

   b) En déduire $p(R \cap \overline{I})$.

3. **a)** Calculer $p(\overline{R} \cap I)$.

   b) En déduire $p_{\overline{R}}(I)$.

4. Recopier et compléter l'arbre de probabilités suivant :



5. Calculer $p_I(R)$. Vous donnerez le résultat sous forme de fraction irréductible puis une valeur approchée. Interpréter le résultat.

6. L'affirmation ci-dessous est-elle vraie ou fausse? Justifier la réponse.

« Parmi les visiteurs achetant via internet, moins de 30% ont un billet à tarif réduit. »

Partie B

Le musée met en place une promotion :

- un visiteur à tarif réduit bénéficie d'une remise de **3 euros** ;
- un visiteur achetant via internet bénéficie d'une remise de **2 euros**.

Les remises sont **cumulables**.
On choisit un visiteur au hasard et on note Y la variable aléatoire égale au **montant total de la remise** (en euros).

1. Donner les valeurs possibles de Y.
2. Exprimer les événements $\{Y=0\}$, $\{Y=2\}$, $\{Y=3\}$ et $\{Y=5\}$ à l'aide de R et I.
3. En déduire la loi de probabilité de Y sous forme d'un tableau.
4. Calculer $\mathbb{E}(Y)$ et interpréter ce résultat.

Partie C - Loi binomiale

On interroge désormais n visiteurs choisis au hasard, de manière indépendante. On note X la variable aléatoire égale au nombre de visiteurs ayant un billet à tarif réduit. On rappelle que :

$$p(R) = 0,35$$

1. **Étude pour une valeur donnée de n**

   On fixe $n = 12$

   a) Justifier que X suit une loi binomiale, dont on précisera les paramètres.
   b) Calculer la probabilité d'avoir exactement 4 visiteurs à tarif réduit.
   c) Calculer la probabilité d'avoir au moins 7 visiteurs à tarif réduit.

2. **Recherche d'un effectif suffisant**

   On veut maintenant déterminer le **nombre minimum** n de visiteurs à interroger afin que la probabilité qu'**au moins un** visiteur ait un billet à tarif réduit soit **supérieure ou égale à** 0,99.

   Déterminer ce nombre n.

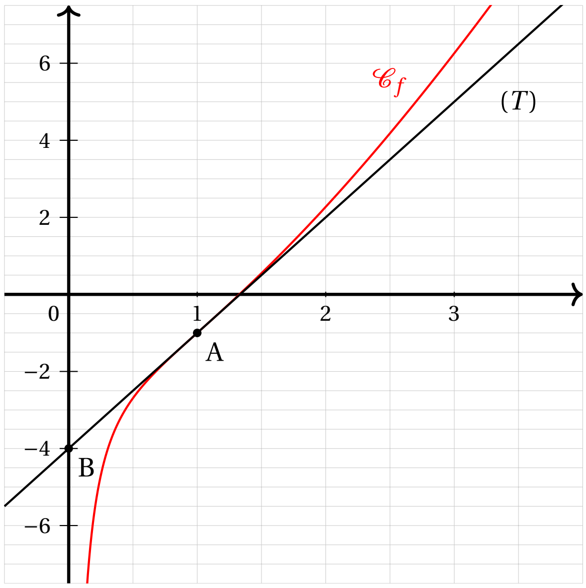
EXERCICE 2 (5 points)

Le but de cet exercice est d'étudier la fonction f définie sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$ par :

$$f(x) = x\ln\left(x^2\right) - \frac{1}{x}.$$

Partie A : lectures graphiques

On a tracé ci-dessous la courbe représentative $\mathscr{C}_f$ de la fonction f, ainsi que la droite (T), tangente à la courbe $\mathscr{C}_f$ au point A de coordonnées $(1\,;\,-1)$.
Cette tangente passe également par le point $\mathrm{B}(0\,;\,-4)$.



1. Lire graphiquement $f(1)$ et $f'(1)$.
2. Donner les intervalles sur lesquels la fonction f semble convexe ou concave.

   Que semble représenter le point A pour la courbe $\mathscr{C}_f$?

Partie B : étude analytique

1. Déterminer, en justifiant, la limite de f en $+\infty$, puis sa limite en 0.
2. On admet que la fonction f est deux fois dérivable sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$.

   a) Déterminer $f'(x)$ pour x appartenant à l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$.

   b) Montrer que pour tout x appartenant à l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$:

$$f''(x) = \frac{2(x+1)(x-1)}{x^3}$$

3. **a)** Étudier la convexité de la fonction f sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$.

   b) Déterminer l'équation de la tangente (T) à la courbe $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse 1, et determiner la position relative de $\mathscr{C}_f$ et de (T).

   c) Étudier les variations de la fonction f', puis le signe de $f'(x)$ pour x appartenant à l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$.
   En déduire le sens de variation de la fonction f sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$.

4. **a)** Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$.

   b) Donner la valeur arrondie au centième de α et montrer que α vérifie :

$$\alpha^2 = \exp\left(\frac{1}{\alpha^2}\right).$$

EXERCICE 3 (5 points)

Pour chacune des affirmations suivantes, indiquer si elle est vraie ou fausse.

Chaque réponse doit être justifiée. **Une réponse non justifiée ne rapporte aucun point**.

1. **Affirmation 1 :** $\forall x \in \mathbb{R}, x^3 - 1 \leqslant f(x) \leqslant x^3 \implies \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{f(x)}{\mathrm{e}^x} = 0$
2. Dans une classe de 24 élèves, il y a 14 filles et 10 garçons.

   Affirmation 2 : Il est possible de constituer 16 380 groupes différents de quatre élèves composés de deux filles et deux garçons.
3. Soit f une fonction définie sur un intervalle I.

   Affirmation 3 : si f est continue sur I, alors f est dérivable sur I.
4. **Affirmation 4 :** dans un repère du plan, la courbe $\mathscr{C}$ d'équation $y = \mathrm{e}^{2x} - 16\mathrm{e}^x + 8x^2$ admet un point d'inflexion d'abscisse $x = \ln\left(\sqrt{2}\right)$.
5. Soit (u_n) une suite croissante et telle que pour tout entier naturel n non nul, $u_n \leqslant 2 - \dfrac{3}{n}$.

   Affirmation 5 : la suite (u_n) converge vers 2.

EXERCICE 4 (5 points)

On se propose de comparer l'évolution d'une population animale dans deux milieux distincts A et B.

Au 1er janvier 2025, on introduit 6 000 individus dans chacun des milieux A et B.

Partie A

Dans cette partie, on étudie l'évolution de la population dans le milieu A.

On suppose que dans ce milieu, l'évolution de la population est modélisée par une suite géométrique (u_n) de premier terme $u_0 = 6$ et de raison $0,93$.

Pour tout entier naturel n, u_n représente la population au 1^{er} janvier de l'année $2025 + n$, exprimée en millier d'individus.

1. Donner, selon ce modèle, la population au 1er janvier 2026.
2. Pour tout entier naturel n, exprimer u_n en fonction de n.
3. Déterminer la limite de la suite (u_n).

   Interpréter ce résultat dans le contexte de l'exercice.

Partie B

Dans cette partie, on étudie l'évolution de la population dans le milieu B.

On suppose que dans ce milieu, l'évolution de la population est modélisée par la suite (v_n) définie par

$$v_0 = 6 \text{ et pour tout entier naturel } n,\ v_{n+1} = -0,05v_n^2 + 1,1v_n.$$

Pour tout entier naturel n, v_n représente la population au 1er janvier de l'année $2025 + n$, exprimée en millier d'individus.

1. Donner, selon ce modèle, la population au 1er janvier 2026.

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$ par

$$f(x) = -0,05x^2 + 1,1x.$$

2. Démontrer que la fonction f est croissante sur l'intervalle $[0\,;\,11]$.

3. Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n, on a

$$2 \leqslant v_{n+1} \leqslant v_n \leqslant 6.$$

4. En déduire que la suite (v_n) est convergente vers une limite ℓ.

5. **a)** Justifier que la limite ℓ vérifie $f(\ell) = \ell$ puis en déduire la valeur de ℓ.

b) Interpréter ce résultat dans le contexte de l'exercice.

Partie C

On souhaite savoir à partir de quelle année la poulation du milieu B sera inférieure strictement à 3000 individus.

1. Compléter la fonction Python ci-dessous pour qu'elle réponde à cette question :

```python
def seuil():
    n = 0
    v = 6
    while ...... :
        n = n + 1
        v = -0.05*v*v .......
    return n
```

2. Quelle est la valeur renvoyée par cette fonction ?