

# BACCALAURÉAT BLANC

ÉPREUVE D'ENSEIGNEMENT DE SPÉCIALITÉ

SESSION 2026

## MATHÉMATIQUES

Durée de l'épreuve : **4 heures**

*L'usage de la calculatrice avec mode examen actif est autorisé.*

Dès que ce sujet vous est remis, assurez-vous qu'il est complet.

Ce sujet comporte 6 pages numérotées de 1/6 à 6/6.

**Le candidat traite les 4 exercices proposés.**

*Le candidat est invité à faire figurer sur la copie toute trace de recherche, même incomplète ou non fructueuse, qu'il aura développée.*

*La qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements seront prises en compte dans l'appréciation de la copie. Les traces de recherche, même incomplètes ou infructueuses, seront valorisées.*

**EXERCICE 1 (5 points)**

*Cet exercice est constitué de trois parties indépendantes*

Un magasin est équipé de caisses automatiques en libre-service où le client scanne lui-même ses articles. Le logiciel d'une caisse déclenche régulièrement des demandes de vérification. Un employé du magasin effectue alors un contrôle.

**Partie A**

Le contrôle peut être :

- soit « total » : l'employé du magasin scanne alors à nouveau l'ensemble des articles du client;
- soit « partiel » : l'employé choisit alors un ou plusieurs articles du client pour vérifier qu'ils ont bien été scannés.

Si un contrôle est déclenché, il s'agit dans 20% des cas d'un contrôle total.

Lorsqu'un contrôle total est déclenché, une erreur du client est détectée dans 1 cas sur 3.

Lorsqu'un contrôle partiel est effectué, dans 7 cas sur 8, il n'y a pas d'erreur.

Un contrôle est déclenché à une caisse automatique.

On considère les événements suivants :

- $T$  : « Le contrôle est un contrôle total »;
- $E$  : « Une erreur est détectée lors du contrôle ».

On notera  $\bar{T}$  et  $\bar{E}$  les événements contraires de  $T$  et  $E$ .

1. Construire un arbre pondéré représentant la situation puis déterminer  $P(\bar{T} \cap E)$ .
2. Calculer la probabilité qu'une erreur soit détectée lors d'un contrôle.
3. Déterminer la probabilité qu'un contrôle total ait été effectué, sachant qu'une erreur a été détectée.

**Partie B**

Sur une journée donnée, une caisse automatique déclenche 15 contrôles. La probabilité qu'un contrôle mette en évidence une erreur est  $p = \frac{1}{6}$ . La détection d'une erreur lors d'un contrôle est indépendante des autres contrôles.

On note  $X$  la variable aléatoire égale au nombre d'erreurs détectées lors des contrôles de cette journée.

1. On admet que la variable aléatoire  $X$  suit une loi binomiale. Préciser ses paramètres.
2. Déterminer la probabilité qu'exactly 5 erreurs soient détectées. *On donnera la valeur arrondie au centième.*
3. Déterminer la probabilité qu'au moins une erreur soit détectée. *On donnera la valeur arrondie au centième.*

4. On souhaite modifier le nombre de contrôles déclenchés par la caisse de manière à ce que la probabilité qu'au moins une erreur soit détectée chaque jour soit supérieure à 99 %.

Déterminer le nombre de contrôles que doit déclencher la caisse chaque jour pour que cette contrainte soit respectée.

### Partie C

Le magasin comporte trois caisses automatiques identiques qui, lors d'une journée, ont chacune déclenché 20 contrôles. On note  $X_1$ ,  $X_2$  et  $X_3$  les variables aléatoires associant à chacune des caisses le nombre d'erreurs détectées lors de cette journée.

On admet que les variables aléatoires  $X_1$ ,  $X_2$  et  $X_3$  sont indépendantes entre elles et suivent chacune une loi binomiale  $\mathcal{B}\left(20; \frac{1}{6}\right)$ .

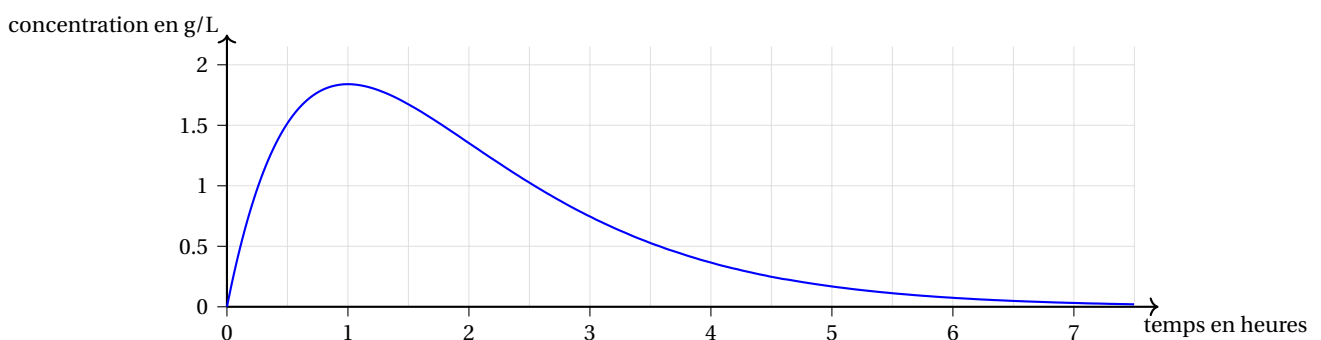
- Déterminer les valeurs exactes de l'espérance et de la variance de la variable aléatoire  $X_1$ .
- On définit la variable aléatoire  $S$  par  $S = X_1 + X_2 + X_3$ .  
Justifier que  $E(S) = 10$  et que  $V(S) = \frac{25}{3}$ .
- À l'aide de l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev, montrer que la probabilité que le nombre total d'erreurs sur la journée soit strictement compris entre 5 et 15 est supérieure à  $\frac{2}{3}$ .

### EXERCICE 2 (6 points)

On se propose d'étudier la concentration dans le sang d'un médicament ingéré par une personne pour la première fois. Soit  $t$  le temps (en heures) écoulé depuis l'ingestion de ce médicament.

On admet que la concentration de ce médicament dans le sang, en gramme par litre de sang, est modélisée par une fonction  $f$  de la variable  $t$  définie sur l'intervalle  $[0; +\infty[$ .

#### Partie A : lectures graphiques



On a représenté ci-dessus la courbe représentative de la fonction  $f$ . Donner sans justification :

- Le temps écoulé depuis l'instant de l'ingestion de ce médicament et l'instant où la concentration de médicament dans le sang est maximale selon ce modèle.
- L'ensemble des solutions de l'inéquation  $f(t) \geq 1$ .
- La convexité de la fonction  $f$  sur l'intervalle  $[0; 8]$ .

**Partie B : détermination de la fonction  $f$** 

On considère l'équation différentielle

$$(E) : y' + y = 5e^{-t},$$

d'inconnue  $y$ , où  $y$  est une fonction définie et dérivable sur l'intervalle  $[0 ; +\infty[$ .

On admet que la fonction  $f$  est une solution de l'équation différentielle (E).

1. Résoudre l'équation différentielle (E') :  $y' + y = 0$ .
2. Soit  $u$  la fonction définie sur l'intervalle  $[0 ; +\infty[$  par  $u(t) = ate^{-t}$  avec  $a \in \mathbb{R}$ .  
Déterminer la valeur du réel  $a$  telle que la fonction  $u$  soit solution de l'équation (E).
3. En déduire l'ensemble des solutions de l'équation différentielle (E).
4. La personne n'ayant pas pris ce médicament auparavant, on admet que  $f(0) = 0$ .  
Déterminer l'expression de la fonction  $f$ .

**Partie C : étude de la fonction  $f$** 

Dans cette partie, on admet que  $f$  est définie sur l'intervalle  $[0 ; +\infty[$  par  $f(t) = 5te^{-t}$ .

1. Déterminer la limite de  $f$  en  $+\infty$ .  
Interpréter ce résultat dans le contexte de l'exercice.
2. Étudier les variations de  $f$  sur l'intervalle  $[0 ; +\infty[$  puis dresser son tableau de variation complet.
3. Démontrer qu'il existe deux réels  $t_1$  et  $t_2$  tels que  $f(t_1) = f(t_2) = 1$ .  
On donnera une valeur approchée à  $10^{-2}$  des réels  $t_1$  et  $t_2$ .
4. Pour une concentration du médicament supérieure ou égale à 1 gramme par litre de sang, il y a un risque de somnolence.  
Quelle est la durée en heures et minutes du risque de somnolence lors de la prise de ce médicament?

**Partie D : concentration moyenne**

La concentration moyenne du médicament (en g/L de sang) durant la première heure est donnée par :

$$T_m = \int_0^1 f(t) dt$$

où  $f$  est la fonction définie sur  $[0 ; +\infty[$  par  $f(t) = 5te^{-t}$ .

Déterminer cette concentration moyenne à l'aide d'une intégration par parties.

On donnera la valeur exacte puis une valeur approchée à 0,01 près.

**EXERCICE 3 (5 points)**

Soit  $a$  un nombre réel strictement supérieur à 1.

On considère la suite  $(u_n)$  définie par  $u_0 = a$  et, pour tout entier naturel  $n$  :

$$u_{n+1} = u_n^2 - 2u_n + 2.$$

On admet que pour tout entier naturel  $n$ ,  $u_n > 1$ .

L'objectif de cet exercice est d'étudier la suite  $(u_n)$  pour différentes valeurs du nombre réel  $a$ .

**Partie A : étude de la suite  $(u_n)$  dans le cas  $1 < a < 2$** 

1. a) Montrer que, pour tout entier naturel  $n$ , on a :  $u_{n+1} - 2 = u_n(u_n - 2)$ .  
 b) Montrer que, pour tout entier naturel  $n$ , on a :  $u_{n+1} - u_n = (u_n - 1)(u_n - 2)$ .
2. Dans cette question, on pourra utiliser les égalités établies dans la question précédente.
  - a) En utilisant un raisonnement par récurrence démontrer que, pour tout entier naturel  $n$  :  $u_n < 2$ .
  - b) Montrer que la suite  $(u_n)$  est convergente et déterminer sa limite.

**Partie B : étude dans le cas particulier  $a = 2$** 

1. On donne ci-contre la fonction  $u$  écrite en langage Python.  
 Déterminer les valeurs renvoyées par le programme lorsque l'on saisit  $u(2, 1)$  et  $u(2, 2)$  dans la console Python.

```
def u(a,n) :
    u=a
    for k in range(n) :
        u=u**2-2*u+2
    return u
```

2. Quelle conjecture peut-on formuler concernant la suite  $(u_n)$  dans le cas où  $a = 2$ ?  
 On admettra ce résultat sans démonstration.

**Partie C : étude dans le cas général**

1. On considère la suite  $(v_n)$  définie, pour tout entier naturel  $n$ , par  $v_n = \ln(u_n - 1)$ .
  - a) Montrer que la suite  $(v_n)$  est une suite géométrique de raison 2 dont on précisera le premier terme en fonction de  $a$ .
  - b) En déduire que, pour tout entier naturel  $n$ ,  $u_n = 1 + e^{2^n \times \ln(a-1)}$ .
2. Déterminer, suivant les valeurs du réel  $a$  strictement supérieur à 1, la limite de la suite  $(u_n)$ .

**EXERCICE 4 (4 points)**

Pour chacune des affirmations suivantes, indiquer si elle est vraie ou fausse. Chaque réponse doit être justifiée.

**Une réponse non justifiée ne rapporte aucun point.**

- Dans l'espace muni d'un repère orthonormé, on considère :

- le plan  $\mathcal{P}$  d'équation cartésienne  $2x - y + 3z + 6 = 0$
- les points  $A(2; 0; -1)$  et  $B(5; -3; 7)$

**Affirmation 1 :** le plan  $\mathcal{P}$  et la droite  $(AB)$  sont parallèles.

**Affirmation 2 :** la distance du point  $A$  au plan  $\mathcal{P}$  est égale à  $\frac{\sqrt{14}}{2}$ .

- Soit  $f$  la fonction définie sur  $]0; +\infty[$  par :

$$f(x) = x^2 \ln(x) - \frac{9}{2}x^2$$

**Affirmation 3 :**  $f$  est convexe sur  $[e^3; +\infty[$ .

- Un code est constitué de 4 chiffres de 0 à 9, deux à deux distincts, le premier chiffre étant différent de 0.

**Affirmation 4 :** le nombre de codes différents pouvant être générés est 3 456.