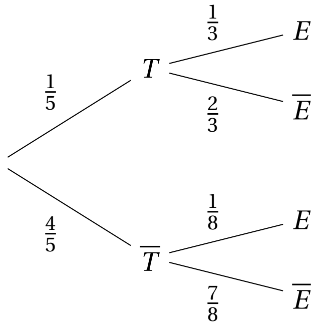
BACCALAURÉAT BLANC - 22 Mai 2026

CORRECTION



Exercice 1 (5 points)

Partie A

1. $p\left(\overline{T}\cap E\right) = p(\overline{T}) \times p_{\overline{T}}(E) = \dfrac{4}{5} \times \dfrac{1}{8} = \dfrac{1}{10}$

2. On cherche $p(E)$. Probabilités totales :

$$p(E) = p(T\cap E) + p(\overline{T}\cap E) = p(T)\times p_T(E) + p(\overline{T})\times p_{\overline{T}}(E) = \frac{1}{5}\times\frac{1}{3} + \frac{1}{10} = \frac{1}{15} + \frac{1}{10} = \frac{5}{30} = \boxed{\frac{1}{6}}$$

3. On cherche $p_E(T)$:

$$p_E(T) = \frac{p(T\cap E)}{p(E)} = \frac{\frac{1}{15}}{\frac{1}{6}} = \frac{6}{15} = \frac{2}{5} = 0,4$$

Partie B

1. $\boxed{n = 15}$ $\quad\quad$ $\boxed{p = \dfrac{1}{6}}$

2. On cherche $p(X = 5)$:

$$p(X=5) = \begin{pmatrix} 5 \\ 15 \end{pmatrix} \times \left(\frac{1}{6}\right)^5 \times \left(\frac{5}{6}\right)^{10} \simeq \boxed{0,06}$$

3. On cherche $p(X \geqslant 1)$. On peut passer par l'événement contraire :

$$p(X\geqslant 1) = 1 - p(X=0) = 1 - \begin{pmatrix} 0 \\ 15 \end{pmatrix} \times \left(\frac{1}{6}\right)^0 \times \left(\frac{5}{6}\right)^{15} = 1 - \left(\frac{5}{6}\right)^{15} \simeq \boxed{0,94}$$

4. Soit n le nombre de contrôles cherché. Si X désigne encore le nombre d'erreurs mises en évidence, alors X suit une loi binomiale de paramètres n et $p = \frac{1}{6}$. Il faut alors résoudre l'inéquation :

$$p(X\geqslant 1) \geqslant 0,99 \iff 1 - p(X=0) \geqslant 0,99 \iff \left(\frac{5}{6}\right)^n \leqslant 0,01$$

On compose par ln croissante, et on divise par $\ln\left(\frac{5}{6}\right) < 0$:

$$\left(\frac{5}{6}\right)^n \leqslant 0,01 \iff n \times \ln\left(\frac{5}{6}\right) \leqslant \ln(0,01) \iff n \geqslant \frac{\ln(0,01)}{\ln\left(\frac{5}{6}\right)} \implies \boxed{n \geqslant 26}$$

Partie C

1. X_1 suit une loi binomiale de paramètres $n = 20$ et $p = \frac{1}{6}$ donc :

$$E(X_1) = n\times p = \frac{20}{6} = \boxed{\frac{10}{3}} \qquad V(X_1) = n\times p\times(1-p) = 20\times\frac{1}{6}\times\frac{5}{6} = \frac{100}{36} = \boxed{\frac{25}{9}}$$

2. Les variables aléatoires X_1, X_2 et X_3 ont toutes la même loi, donc la même espérance $E = \frac{10}{3}$ et la même variance $V = \frac{25}{9}$. Par linéarité de l'espérance :

$$E(S) = E(X_1) + E(X_2) + E(X_3) = 3 \times \frac{10}{3} = \boxed{10}$$

De plus, les variables aléatoires X_1, X_2 et X_3 étant indépendantes d'après l'énoncé, on a :

$$V(S) = V(X_1) + V(X_2) + V(X_3) = 3 \times \frac{25}{9} = \boxed{\frac{25}{3}}$$

3. On cherche à minorer la probabilité $p(5 < S < 15)$. Or :

$$p(5 < S < 15) = p(-5 < S - 10 < 5) = p(|S - 10| < 5) = p(|S - E(S)| < 5)$$

En passant à l'événement contraire, on obtient donc :

$$p(5 < S < 15) = 1 - p(|S - E(S)| \geqslant 5)$$

Or, l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev nous dit que :

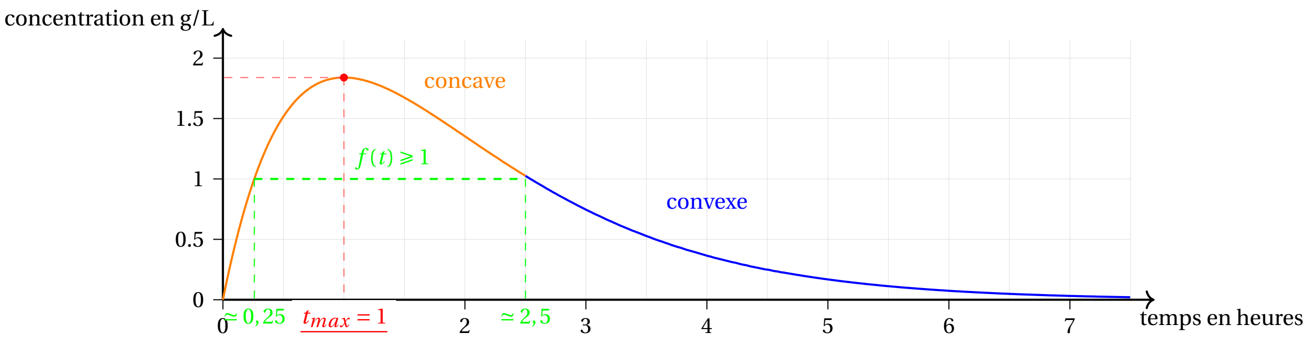
$$p(|S - E(S)| \geqslant 5) \leqslant \frac{V(S)}{5^2} \implies p(|S - E(S)| \geqslant 5) \leqslant \frac{\frac{25}{3}}{25} \implies p(|S - E(S)| \geqslant 5) \leqslant \frac{1}{3}$$

Ainsi, on a :

$$1 - p(|S - E(S)| \geqslant 5) \geqslant 1 - \frac{1}{3} \implies 1 - p(|S - E(S)| \geqslant 5) \geqslant \frac{2}{3} \implies \boxed{p(5 < S < 15) \geqslant \frac{2}{3}}$$

EXERCICE 2 (6 points)

Partie A : lectures graphiques



1. $t_{max} = 1s$

2. $f(t) \geqslant 1 \iff t \in [0,25 ; 2,5]$

3. f semble concave sur $[0 ; 2,5]$ puis convexe sur $[2,5 ; 8]$.

Partie B : détermination de la fonction f

1. D'après le cours, les solutions sont les fonctions de la forme :

$$\boxed{y_0(t) = C\mathrm{e}^{-t} \quad C \in \mathbb{R}}$$

2. Si $u(t) = at\mathrm{e}^{-t}$, alors $u'(t) = a\mathrm{e}^{-t} - at\mathrm{e}^{-t} = a(1-t)\mathrm{e}^{-t}$

Ainsi, u est solution de (E) si et seulement si :

$$u'(t) + u(t) = 5\mathrm{e}^{-t} \iff a(1-t)e^{-t} + at\mathrm{e}^{-t} = 5\mathrm{e}^{-t} \iff a\mathrm{e}^{-t} = 5\mathrm{e}^{-t} \iff \boxed{a = 5}$$

3. L'ensemble des solutions de (E) sont les fonctions dont l'expression est de la forme :

$$y(t) = y_0(t) + u(t)$$

où y_0 est solution de l'équation homogène $y' + y = 0$, et u est une solution particulière de (E).

D'après ce qui précède, les solutions sont donc les fonctions de la forme :

$$y(t) = C\mathrm{e}^{-t} + 5t\mathrm{e}^{-t} \implies \boxed{y(t) = (C+5t)\mathrm{e}^{-t}, \quad C \in \mathbb{R}}$$

4. f est donc la fonction vérifiant :

$$f(t) = (C+5t)\mathrm{e}^{-t} \qquad f(0) = 0$$

En remplaçant t par 0, on détermine la valeur de C associée à la fonction f :

$$f(0) = 0 \iff (C + 5 \times 0)\mathrm{e}^{-0} = 0 \iff C = 0$$

D'où l'expression de f pour tout $t \in \mathbb{R}$:

$$\boxed{f(t) = 5t\mathrm{e}^{-t}}$$

Partie C : étude de la fonction f

1. Pour tout réel $t \geqslant 0$, $f(t) = \frac{5t}{\mathrm{e}^t}$.

Ainsi, par croissances comparées, on a $\boxed{\lim\limits_{x \to +\infty} f(t) = 0}$.

Cela signifie qu'au bout d'un certain temps, le médicament finit par disparaître de l'organisme du patient.

2. f est évidemment dérivable sur $[0\,;+\infty[$ et pour tout réel $t \geqslant 0$, $f'(t) = 5(1-t)\mathrm{e}^{-t}$. Ainsi, e^{-t} étant strictement positif quelque soit le réel t :

$$f'(t) \geqslant 0 \iff 1 - t \geqslant 0 \iff t \leqslant 1$$

t	0		t_1		1		t_2		$+\infty$
$f'(t)$		$+$			0			$-$	
$f(t)$	0	↗	1	↗	$\frac{5}{\mathrm{e}}$	↘	1	↘	0

3. Heureusement pour nous, $\dfrac{5}{e} \simeq 1,84 > 1$!

La fonction f est continue et strictement croissante sur $[0;1]$, à valeurs dans $\left[0;\frac{5}{e}\right]$. Comme $1 \in \left[0;\frac{5}{e}\right]$, alors d'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $f(t) = 1$ admet une unique solution t_1 sur $[0;1]$.

De même, l'équation $f(t) = 1$ admet une unique solution t_2 sur $[1;+\infty]$.

Avec la calculatrice, on obtient :

$$\boxed{t_1 \simeq 0,26} \qquad \boxed{t_2 \simeq 2,54}$$

4. D'après ce qui précède, cette durée est égale à $t_2 - t_1$, soit environ $2,28$ heures.

Ou encore 2 heures et 17 minutes environ. $(0,28 \times 60 \simeq 17)$

Partie D : concentration moyenne

On cherche à calculer $T_m = \displaystyle\int_0^1 5t\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t$. On intègre par parties, avec :

$$\begin{array}{ll} u(t) = 5t & u'(t) = 5 \\ v'(t) = \mathrm{e}^{-t} & v(t) = -\mathrm{e}^{-t} \end{array}$$

$$\begin{aligned}
T_m &= \left[-5t\mathrm{e}^{-t}\right]_0^1 - \int_0^1 -5\mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}t \\
&= \left[-5t\mathrm{e}^{-t}\right]_0^1 + 5\int_0^1 \mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}t && \text{(par linéarité de l'intégrale)} \\
&= \left[-5t\mathrm{e}^{-t} - 5\mathrm{e}^{-t}\right]_0^1 \\
&= -5\mathrm{e}^{-1} - 5\mathrm{e}^{-1} + 0\mathrm{e}^{-0} + 5\mathrm{e}^{-0} \\
&= 5 - 10\mathrm{e}^{-1} \\
&= \boxed{5 - \frac{10}{e}}
\end{aligned}$$

Valeur approchée : $\boxed{Tm \simeq 1,32}$

EXERCICE 3 (5 points)

Partie A : étude de la suite (u_n) dans le cas $1 < a < 2$

1. **a)** D'après la définition : pour tout entier naturel n

$u_{n+1} = u_n^2 - 2u_n + 2 \iff u_{n+1} - 2 = u_n^2 - 2u_n \iff \boxed{u_{n+1} - 2 = u_n\,(u_n - 2)}$.

b) Pour tout entier naturel n, $u_{n+1} - u_n = u_n^2 - 2u_n + 2 - u_n = u_n^2 - 3u_n + 2$;

On peut développer la réponse donnée ou bien considérer le trinôme $x^2 - 3x + 2$, dont les racines ont $x_1 = 2$ et $x_2 = 1$.

Ainsi, pour tout réel x, $x^2 - 3x + 2 = (x-1)(x-2)$ soit $\boxed{u_{n+1} - u_n = (u_n - 1)\,(u_n - 2)}$.

2. **a)** **Initialisation** : $u_0 = a$ et $1 < a < 2$, donc $u_0 < 2$: l'inégalité est vraie au rang 0 ;

Hérédité : soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $u_n < 2$.

$u_n < 2 \iff u_n - 2 < 0$ et on a admis que $u_n > 1 \implies u_n > 0$, donc d'après le **1 a.**, $u_{n+1} - 2 = u_n(u_n - 2) < 0$ (produit d'un positif par un négatif). Ainsi, on a bien $u_{n+1} < 2$: l'inégalité est vraie au rang $n+1$.

Conclusion : l'inégalité est vraie au rang 0 et si elle est vraie au rang n, elle l'est aussi au rang $n+1$, donc par le principe de récurrence :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ u_n < 2}$$

b) D'après ce qui précède, on a $u_n > 1$ (admis) et $u_n < 2$, donc $(u_n - 1)(u_n - 2) < 0$. Or, d'après **1 b.**, cela implique que $u_{n+1} - u_n < 0$ donc (u_n) est strictement décroissante.

Ainsi, la suite (u_n) est strictement décroissante et minorée par 1 : d'après le théorème de convergence monotone, elle converge donc vers un réel $\ell \geqslant 1$.

Par continuité de la fonction polynôme $x \longmapsto x^2 - 2x + 2$, la relation de récurrence donne à la limite en plus l'infini :

$$\ell = \ell^2 - 2\ell + 2 \iff \ell^2 - 3\ell + 2 = 0 \iff \left\{\begin{array}{ccc} \ell - 1 & = & 0 \\ & \text{ou} & \\ \ell - 2 & = & 0 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{ccc} \ell & = & 1 \\ & \text{ou} & \\ \ell & = & 2 \end{array}\right.$$

$\ell = 2$ n'est pas possible puisque (u_n) étant strictement décroissante : $\ell < u_0 = a < 2$, d'où $\ell < 2$.

Nécessairement, $\ell = 1$. $\boxed{\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 1}$

Partie B : étude dans le cas particulier $a = 2$

1. u(2,1) renvoie 2 et u(2,2) renvoie 2

2. On peut conjecturer que la suite (u_n) est constante : $u_n = 2$ quel que soit $n \in \mathbb{N}$

Partie C : étude dans le cas général

1. On considère la suite (v_n) définie, pour tout entier naturel n, par $v_n = \ln(u_n - 1)$.

a) Quel que soit $n \in \mathbb{N}$, $v_{n+1} = \ln(u_{n+1} - 1) = \ln\left(u_n^2 - 2u_n + 2 - 1\right) = \ln\left[(u_n - 1)^2\right] = 2\ln(u_n - 1)$ car on sait que $u_n > 1 \iff u_n - 1 > 0$.

Finalement : $v_{n+1} = 2\ln(u_n - 1) = 2v_n$.

L'égalité $v_{n+1} = 2v_n$ vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$ montre que la suite (v_n) est une suite géométrique de raison 2 de premier terme $v_0 = \ln(a-1)$

b) On sait que quel que soit $n \in \mathbb{N}$, $v_n = v_0 \times 2^n \implies \boxed{v_n = 2^n \ln(a-1)}$.

Or, pour tout entier naturel n, $v_n = \ln(u_n - 1) \implies u_n - 1 = \mathrm{e}^{v_n} \implies u_n = 1 + \mathrm{e}^{v_n}$. D'où :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = 1 + \mathrm{e}^{2^n \ln(a-1)}}$$

2. On rappelle que $\lim\limits_{n \to +\infty} 2^n = +\infty$

- **1er cas** : si $1 < a < 2$, alors $0 < a - 1 < 1$ et par croissance de ln, $\ln(a-1) < 0$.
  Ainsi, $\lim\limits_{n \to +\infty} 2^n \ln(a-1) = -\infty$, donc par composée de limites, $\lim\limits_{n \to +\infty} \mathrm{e}^{2^n \ln(a-1)} = 0$.
  Il s'en suit que $\boxed{\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 1}$.
- **2ème cas** : si $a = 2$, on a admis dans la partie B que (u_n) est constante égale à 2, donc $\boxed{\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 2}$.
- **3ème cas** : si $a > 2$, alors $a - 1 > 1$ et $\ln(a-1) > 0$.
  Ainsi, $\lim\limits_{n \to +\infty} 2^n \ln(a-1) = +\infty$, donc par composée de limites, $\lim\limits_{n \to +\infty} \mathrm{e}^{2^n \ln(a-1)} = +\infty$.
  Il s'en suit que $\boxed{\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty}$.

EXERCICE 4 (4 points)

Affirmation 1 : le plan $\mathscr{P}$ et la droite (AB) sont parallèles. .... **FAUX**

Un vecteur normal de $\mathscr{P}$ est $\vec{n}\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$ et un vecteur directeur de (AB) est $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} 3 \\ -3 \\ 8 \end{pmatrix}$.

$\mathscr{P}$ et (AB) sont parallèles si les vecteurs $\vec{n}$ et $\overrightarrow{AB}$ sont orthogonaux, or ils ne le sont pas :

$$\vec{n} \cdot \overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \\ 8 \end{pmatrix} = 2 \times 3 + (-1) \times (-3) + 3 \times 8 = 33 \neq 0$$

Affirmation 2 : la distance du point A au plan $\mathscr{P}$ est égale à $\dfrac{\sqrt{14}}{2}$. .... **VRAI**

Méthode 1 : la distance du point A au plan $\mathscr{P}$ est égale à la distance AH, où H est le projeté orthogonal de A sur $\mathscr{P}$. Soit (d) la droite orthogonale à $\mathscr{P}$ passant par A. H est encore le point d'intersection de (d) et $\mathscr{P}$.

Comme (d) est orthogonale à $\mathscr{P}$, un vecteur directeur de (d) est un vecteur normal de $\mathscr{P}$: on peut choisir $\vec{n}$.

Ainsi, une représentation paramétrique de (d) est :

$$\left\{\begin{array}{rcl} x & = & 2 + 2t \\ y & = & -t \\ z & = & -1 + 3t \end{array}\right. , \quad t \in \mathbb{R}$$

L'intersection de (d) et $\mathscr{P}$ est la solution du système :

$$\begin{cases} x=2+2t \\ y=-t \\ z=-1+3t \\ 2x-y+3z+6=0 \end{cases} \iff \begin{cases} x=2+2t \\ y=-t \\ z=-1+3t \\ 2(2+2t)-(-t)+3(-1+3t)+6=0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x=2+2t \\ y=-t \\ z=-1+3t \\ 14t+7=0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x & = & 1 \\ y & = & \frac{1}{2} \\ z & = & -\frac{5}{2} \\ t & = & -\frac{1}{2} \end{cases}$$

Ainsi, $H\left(1;\dfrac{1}{2};-\dfrac{5}{2}\right)$ et $\overrightarrow{AH}\left(-1;\dfrac{1}{2};-\dfrac{3}{2}\right)$, d'où $AH=\sqrt{(-1)^2+\left(\dfrac{1}{2}\right)^2+\left(-\dfrac{3}{2}\right)^2}=\sqrt{1+\dfrac{1}{4}+\dfrac{9}{4}}=\sqrt{\dfrac{14}{4}}=\boxed{\dfrac{\sqrt{14}}{2}}$

Méthode 2 : la distance d'un point $A(x_A;y_A;z_A)$ au plan $\mathscr{P}$ d'équation $ax+by+cz+d=0$ est donnée par :

$$d(A;\mathscr{P})=\frac{\left|ax_A+by_A+cz_A+d\right|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$$

Dans notre cas :

$$d(A;\mathscr{P})=\frac{|2\times 2-0+3\times(-1)+6|}{\sqrt{2^2+(-1)^2+3^2}}=\frac{7}{\sqrt{14}}=\frac{7\sqrt{14}}{14}=\boxed{\frac{\sqrt{14}}{2}}$$

Affirmation 3 : f est convexe sur $\left[e^3;+\infty\right[$ .... **VRAI**

f est deux fois dérivable sur $]0:+\infty[$ et pour tout $x>0$:

$$f'(x)=2x\ln(x)+x^2\times\frac{1}{x}-9x=2x\ln(x)-8x \qquad f''(x)=2\ln(x)+2x\times\frac{1}{x}-8=2\ln(x)-6$$

Ainsi, $f''(x)\geqslant 0 \iff 2\ln(x)-6\geqslant 0 \iff \ln(x)\geqslant 3 \iff x\geqslant \mathrm{e}^3$. Donc f est convexe sur $[\mathrm{e}^3;+\infty[$.

Affirmation 4 : le nombre de codes différents pouvant être générés est 3 456 .... **FAUX**

1er chiffre	2nd chiffre	3ème chiffre	4ème chiffre

Il y a 9 possibilités pour le 1er chiffre (ce ne doit pas être 0).

Ensuite, il faut choisir 3 chiffres différents entre 0 et 9, premier chiffre mis à part : c'est un 3 arrangement, il y a $9\times 8\times 7=504$ possibilités.

Ainsi, le nombre de codes possibles est, par principe multiplicatif : $9\times 504=\boxed{4536}$.