Chapitre 1 : Récurrence

Table des matières

Notions au programme

- Raisonner par récurrence pour établir une propriété d'une suite.

Le raisonnement par récurrence est une méthode de démonstration mathématique puissante, souvent utilisée pour prouver qu'une propriété est vraie pour tous les entiers naturels à partir d'un certain rang.

Historiquement, cette idée remonte à l'Antiquité, mais c'est au XIXe siècle, avec le mathématicien italien Giuseppe Peano, qu'elle a été formalisée rigoureusement. Il a notamment posé les bases de l'arithmétique axiomatique, dans laquelle le raisonnement par récurrence joue un rôle fondamental.

On peut comparer ce raisonnement à une rangée infinie de dominos : si on montre que le premier domino tombe, puis que chaque domino fait tomber le suivant, alors tous les dominos tomberont. De la même façon, on démontre d'abord qu'une propriété est vraie au rang initial, puis qu'elle se transmet d'un rang à l'autre.

I Le raisonnement par récurrence

Exemple. Considérons la suite (u_n) définie par récurrence par :

$$\left\{\begin{array}{rcl} u_0 & = & 0 \\ u_{n+1} & = & u_n + 2n + 1 \end{array}\right.$$

Cette suite n'est ni arithmétique, ni géométrique : impossible alors d'utiliser une formule pour exprimer u_n en fonction de n.
Cependant, on peut, en calculant les premiers termes, conjecturer une expression de u_n en fonction de n :

n	0	1	2	3	4
u_n	0	1	4	9	16

On peut conjecturer que pour tout entier naturel n, $u_n = n^2$.
Mais comment peut-on être sûr que cette formule est toujours vraie ? Le calcul du terme suivant montre que $u_5 = 25$... Mais démontrer que cette formule est **toujours** vraie semble un peu compliqué, et surtout très long !
C'est là qu'intervient le **raisonnement par récurrence**.

I.1 Énoncé du principe

Axiome (Principe de récurrence)**.**
$\mathscr{P}(n)$ désigne une propriété concernant un entier n.
Si l'on prouve les deux étapes suivantes :

Étape 1 : ***Initialisation***

$\boxed{\mathscr{P}(n_0) \text{ est vraie}}$

Étape 2 : ***Hérédité***

$\boxed{\mathscr{P}(n) \text{ vraie} \implies \mathscr{P}(n+1) \text{ vraie}}$

Alors on a :

Étape 3 : ***Conclusion***

$\boxed{\mathscr{P}(n) \text{ est vraie pour tout } n \geqslant n_0}$

☞ *Un* ***axiome*** *est une proposition indémontrable. Les axiomes sont les fondements d'une théorie. Par exemple, la géométrie euclidienne (la géométrie ¡¡ classique ¿¿) repose sur 5 axiomes. Le premier est ¡¡* De tout point à tout autre point on peut tracer une ligne droite *¿¿. (Les Éléments, Euclide, -300 av. JC)*

Remarque. Le principe de récurrence peut s'apparenter à une série des dominos qui tombent les uns après les autres.
Pour que les dominos tombent, il faut que :

- Le premier domino tombe : c'est l'**initialisation**
- Le n-ième domino (où n est un entier quelconque) fasse tomber le $(n+1)$-ième domino : c'est l'**hérédité**
- Ces deux conditions remplies, on est certain qu'à la fin, tous les dominos sont tombés : c'est la **conclusion**.

I.2 Mise en oeuvre

Exemple. On reprend l'exemple précédent :

$$\left\{\begin{array}{rcl} u_0 & = & 0 \\ u_{n+1} & = & u_n + 2n + 1 \end{array}\right.$$

Nous allons démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n, $u_n = n^2$.

- On commence par définir notre propriété à démontrer : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad \mathscr{P}(n) : u_n = n^2$
- **Étape 1 : Initialisation**
  Il faut montrer que $\mathscr{P}(0)$ est vraie, c'est à dire que $u_0 = 0^2$.

  Or, $u_0 = 0$ (par définition de (u_n)) et $0^2 = 0$, donc on a bien $u_0 = 0^2$, et la propriété est vraie au rang 0.
- **Étape 2 : Hérédité**
  C'est l'étape la plus délicate ! On **suppose** que la propriété $\mathscr{P}(n)$ est vraie pour un entier n fixé, c'est à dire que $u_n = n^2$: c'est notre **hypothèse de récurrence** (HR).

  Le but est alors de démontrer que $\mathscr{P}(n+1)$ est vraie, c'est à dire que $u_{n+1} = (n+1)^2$.

  Par hypothèse de récurrence, on a $u_n = n^2$ et on sait, par définition, que $u_{n+1} = u_n + 2n + 1$. En combinant ces égalités :

  $$u_{n+1} = u_n + 2n + 1 = n^2 + 2n + 1 = (n+1)^2$$

  ☞ *On reconnaît une identité remarquable !*

  Ainsi, la propriété est vraie au rang $n+1$, la propriété est donc **héréditaire**.
- **Étape 3 : Conclusion**
  Par principe de récurrence, on conclut que :

  $$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = n^2}$$

Exemple. On considère la suite (u_n) définie par : $\left\{\begin{array}{rcl} u_0 & = & 0,5 \\ u_{n+1} & = & 0,5u_n + 0,3 \end{array}\right.$

À l'aide d'une calculatrice, on a calculé les valeurs des premiers termes de la suite :

$u_1 = 0,55 \qquad u_2 = 0,575 \qquad u_3 = 0,5875 \qquad u_4 = 0,59375 \qquad u_5 = 0,596875$

On peut conjecturer (entre autres) que :

- (u_n) est croissante
- pour tout entier n, $u_n \leqslant 0,6$

Grâce au principe de récurrence, on peut à présent justifier ces deux résultats.
Montrons que pour tout entier naturel n, $u_n \leqslant 0,6$. On note alors $\mathscr{P}(n)$: $u_n \leqslant 0,6$.

- **Initialisation**
  $u_0 = 0,5$ donc $u_0 \leqslant 0,6$. La propriété est donc vraie pour $n = 0$.
- **Hérédité**
  Supposons que $\mathscr{P}(n)$ soit vraie pour un entier n fixé, c'est à dire que $u_n \leqslant 0,6$.

  Montrons que $\mathscr{P}(n+1)$ est vraie, c'est à dire que $u_{n+1} \leqslant 0,6$.

  Ce n'est pas très compliqué :

$$\begin{array}{rl} & u_n \leqslant 0,6 \\ \Longrightarrow & 0,5 \times u_n \leqslant 0,5 \times 0,6 \\ \Longrightarrow & 0,5u_n \leqslant 0,3 \\ \Longrightarrow & 0,5u_n + 0,3 \leqslant 0,6 \\ \Longrightarrow & u_{n+1} \leqslant 0,6 \end{array}$$

  La propriété est donc héréditaire.

  Par principe de récurrence, elle est donc vraie pour tout entier naturel n.

Exercice 1. Montrer que la suite (u_n) de l'exemple précédent est croissante. ✍

☞ *Démontrer que :* $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n \leqslant u_{n+1}$