Exercices : Récurrence

Exercice 01 On considère la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par :

$$\begin{cases} u_0 &= 0 \\ u_{n+1} &= \sqrt{1+u_n^2} \end{cases}$$

1. Calculer les cinq premiers termes de la suite.
2. Émettre une conjecture sur l'expression de u_n en fonction de n.
3. Démontrer cette conjecture par récurrence.

Exercice 02 Même exercice avec :

$$\begin{cases} u_1 &= 1 \\ u_{n+1} &= \frac{u_n}{1+u_n} \end{cases}$$

☞ *Attention à l'indice de départ !*

Exercice 03 On considère la suite (u_n) définie par :

$$\begin{cases} u_0 &= 12 \\ u_{n+1} &= 3u_n - 8 \end{cases}$$

Montrer que pour tout entier naturel n, $u_n = 8 \times 3^n + 4$.

Exercice 04 Soit (u_n) la suite définie pour tout entier n par :

$$\begin{cases} u_0 &= 1 \\ u_{n+1} &= 2u_n - 1 \end{cases}$$

Démontrer quelque chose par récurrence (!).

Exercice 05 Soit (u_n) la suite définie pour tout entier n par :

$$\begin{cases} u_0 &= 1 \\ u_{n+1} &= \sqrt{1+u_n} \end{cases}$$

Après avoir conjecturé le sens de variations de (u_n), démontrer ce résultat par récurrence.

☞ *On démontrera une propriété sous la forme d'une inégalité*

Exercice 06 Soit (u_n) la suite définie pour tout entier n par :

$$\begin{cases} u_0 &= 0 \\ u_{n+1} &= \frac{1+2u_n}{2+u_n} \end{cases}$$

1. Justifier que pour tout entier n, $u_{n+1} = 2 - \frac{3}{2+u_n}$.
2. Démontrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $0 < u_n \leqslant 1$.

Exercice 07 Démontrer par récurrence que, pour tout entier $n \geqslant 4$, on a $2^n \geqslant 4n$.

Exercice 08 Démontrer par récurrence les résultats suivants, pour tout entier $n \geqslant 1$:

$$\sum_{k=1}^{n} k = 1 + 2 + 3 + \ldots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

$$\sum_{k=1}^{n} k^3 = 1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots + n^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$$