Exercices supplémentaires : Récurrence

Exercice 01 ***Expression explicite***
Soit (u_n) la suite définie par :

$$\begin{cases} u_0 & = & 2 \\ u_{n+1} & = & \dfrac{u_n}{1+u_n} \end{cases}$$

Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n, $u_n = \dfrac{2}{2n+1}$.

Exercice 02 ***Double inégalité***
Soit (u_n) la suite définie par :

$$\begin{cases} u_0 & = & 1 \\ u_{n+1} & = & \sqrt{2+u_n} \end{cases}$$

Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n, $0 < u_n < 2$.

Exercice 03 ***Initialisation ?***
Soit (u_n) la suite définie par :

$$\begin{cases} u_0 & = & 5 \\ u_{n+1} & = & \sqrt{1+u_n} \end{cases}$$

Pour tout entier naturel n, on considère la propriété suivante :

$$P(n) : u_n \leqslant u_{n+1}$$

1. Si $P(n)$ est vraie pour tout entier n, que peut-on dire de la suite (u_n) ?
2. Montrer que P est héréditaire.
3. P est-elle initialisée pour une valeur de n ? Conclusion ?

Exercice 04 ♣ ***Inégalité de Bernoulli***
Démontrer par récurrence sur l'entier naturel n que pour tout réel $x > 0$ et pour tout entier naturel n :

$$(1+x)^n \geqslant 1 + nx$$

Exercice 05 ***De deux façons***

1. (a) Montrer que pour tout entier $p \geqslant 1$, $2p \geqslant p+1$.
   (b) Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n : $2^n \geqslant n$
2. Retrouver ce résultat à l'aide de l'inégalité de Bernoulli démontrée dans l'exercice précédent.

Exercice 06 ★ ***Inégalité et Somme***
Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n non nul :

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 \leqslant n^3$$

Exercice 07 ★ ***Suites implicites***
On cherche à justifier l'existence, pour tout entier naturel n, de deux entiers a_n et b_n tels que :

$$(1+\sqrt{2})^n = a_n + b_n\sqrt{2}$$

et à en étudier quelques propriétés.

1. Déterminer les valeurs de a_0, b_0, a_1, b_1, a_2 et b_2.
2. Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n, il existe deux entiers a_n et b_n tels que :
$$(1+\sqrt{2})^n = a_n + b_n\sqrt{2}$$
3. Préciser les expressions de a_{n+1} et b_{n+1} en fonction de a_n et b_n.
4. Démontrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad a_n = \frac{(1+\sqrt{2})^n + (1-\sqrt{2})^n}{2} \quad \text{et} \quad b_n = \frac{(1+\sqrt{2})^n - (1-\sqrt{2})^n}{2\sqrt{2}}$$