Travail en Groupe : Récurrence

Sujet A *: Modélisation*

Partie A

On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 400$ et pour tout entier naturel n :

$$u_{n+1} = 0,9u_n + 60$$

1. (a) Calculer u_1 et u_2.

   (b) Conjecturer le sens de variation de la suite (u_n).

2. Démontrer par récurrence que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad 0 \leqslant u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant 600$$

3. La conjecture émise à la question 1.b) est-elle vérifiée ? Justifier.

4. On considère la fonction Python `mystere` définie par :

```python
def mystere(seuil):
    n = 0
    u = 400
    while u <= seuil:
        n = n + 1
        u = 0.9*u + 60
    return n
```

   (a) Quelle valeur est renvoyée par l'instruction `mystere(500)` ?

   (b) Que se passe-t-il si l'on rentre l'instruction `mystere(700)` ?

Partie B

Un arboriculteur possède un verger dans lequel il a la place de cultiver au maximum 500 arbres.
Chaque année il vend 10% des arbres de son verger et puis il replante 60 nouveaux arbres. Le verger compte 400 arbres en 2023.
L'arboriculteur pense qu'il pourra continuer à vendre et à planter les arbres au même rythme pendant les années à venir.
Va-t-il être confronté à un problème de place dans son verger ? Expliquer votre réponse.

Travail en Groupe : Récurrence

Sujet B *: C'est du sport !*

On étudie un groupe de 3 000 sportifs qui pratiquent soit l'athlétisme dans le club A, soit le basketball dans le club B.
En 2023, le club A compte 1 700 membres et le club B en compte 1 300.
On décide de modéliser le nombre de membres du club A et du club B respectivement par deux suites (a_n) et (b_n), où n désigne le rang de l'année à partir de 2023.
L'année 2023 correspond au rang 0. On a alors $a_0 = 1700$ et $b_0 = 1300$.
Pour notre étude, on fait les hypothèses suivantes :

- durant l'étude, aucun sportif ne quitte le groupe
- chaque année, 15% des sportifs du club A quittent ce club et adhèrent au club B
- chaque année, 10% des sportifs du club B quittent ce club et adhèrent au club A

1. Calculer les nombres de membres de chaque club en 2024.
2. Pour tout entier naturel n, déterminer une relation liant a_n et b_n.
3. Justifier que la suite (a_n) vérifie la relation de récurrence suivante, pour tout entier naturel n :

$$a_{n+1} = 0,75a_n + 300$$

4. Démontrer par récurrence que la suite (a_n) est décroissante.
5. On considère la suite (v_n) définie pour tout entier naturel n par $v_n = a_n - 1200$.
   (a) Démontrer que (v_n) est géométrique. Préciser sa raison et son premier terme.
   (b) Exprimer v_n en fonction de n.
   (c) En déduire que pour tout entier naturel n :

$$a_n = 500 \times 0,75^n + 1200$$

6. (a) Recopier et compléter la fonction Python `seuil()` ci-dessous afin qu'elle renvoie la plus petite valeur de n à partir de laquelle le nombre de membres du club A est strictement inférieur à 1 280.

```
def seuil():
    n = 0
    A = 1700
    while ............ :
        n = n + 1
        A = ............
    return ............
```

   (b) Quelle valeur est retournée par la fonction `seuil()` ?

Travail en Groupe : Récurrence

***Sujet C** : FAQ*

Une entreprise a créé une Foire Aux Questions (« FAQ ») sur son site internet.
On étudie le nombre de questions qui y sont posées chaque mois.

Partie A : Première modélisation

Dans cette partie, on admet que, chaque mois :

- 90 % des questions déjà posées le mois précédent sont conservées sur la FAQ ;
- 130 nouvelles questions sont ajoutées à la FAQ.

Au cours du premier mois, 300 questions ont été postées.

Pour estimer le nombre de questions, en centaines, présentes sur la FAQ le n-ième mois, on modélise la situation ci-dessus à l'aide de la suite (u_n) définie par :

$$u_1 = 3 \quad \text{et, pour tout entier naturel } n \geqslant 1,\ u_{n+1} = 0,9u_n + 1,3.$$

1. Calculer u_2 et u_3 et proposer une interprétation dans le contexte de l'exercice.
2. Montrer par récurrence que pour tout entier naturel $n \geqslant 1$:
$$u_n = 13 - \frac{100}{9} \times 0,9^n.$$
3. En déduire que la suite (u_n) est croissante.
4. On considère le programme ci-contre, écrit en langage Python.

   Déterminer la valeur renvoyée par la saisie de seuil(8.5) et l'interpréter dans le contexte de l'exercice.

```python
def seuil(p):
    n = 1
    u = 3
    while u <= p:
        n = n + 1
        u = 0.9*u + 1.3
    return n
```

Partie B : Une autre modélisation

Dans cette partie, on considère une seconde modélisation à l'aide d'une nouvelle suite (v_n) définie pour tout entier naturel $n \geqslant 1$ par :

$$v_n = 9 - 6 \times \mathrm{e}^{-0,19\times(n-1)}.$$

Le terme v_n est une estimation du nombre de questions, en centaines, présentes le n-ième mois sur la FAQ.

1. Préciser les valeurs arrondies au centième de v_1, v_2 et v_3.
2. Déterminer, à l'aide de la calculatrice, la plus petite valeur de n telle que $v_n > 8,5$.

Partie C : Comparaison des deux modèles

1. L'entreprise considère qu'elle doit modifier la présentation de son site lorsque plus de 850 questions sont présentes sur la FAQ.

   Parmi ces deux modélisations, laquelle conduit à procéder le plus tôt à cette modification ?

   Justifier votre réponse.

2. En justifiant la réponse, pour quelle modélisation y a-t-il le plus grand nombre de questions sur la FAQ à long terme ?