Chapitre 3 : Combinatoire et Dénombrement

Table des matières

Notions au programme

- Principe additif : nombre d'éléments d'une réunion d'ensembles deux à deux disjoints.
- Principe multiplicatif : nombre d'éléments d'un produit cartésien. Nombre de k-uplets (ou k-listes) d'un ensemble à n éléments.
- Nombre des parties d'un ensemble à n éléments. Lien avec les n-uplets de 0,1.
- Nombre des k-uplets d'éléments distincts d'un ensemble à n éléments. Définition de $n!$. Nombre de permutations d'un ensemble fini à n éléments.
- Combinaisons de k éléments d'un ensemble à n éléments : parties à k éléments de l'ensemble.
- Formule de $\binom{n}{k}$, valeurs remarquables, symétrie.
- Relation et triangle de Pascal.

Le dénombrement est une branche des mathématiques qui s'intéresse aux différentes manières de compter et d'organiser des objets. Derrière une idée en apparence simple – compter des possibilités – se cachent des situations variées et parfois complexes : combien de codes différents peut-on former avec quelques chiffres ? Combien de façons de distribuer des cartes à des joueurs ? Comment recenser toutes les solutions possibles d'un problème sans en oublier ni en compter deux fois ? Le dénombrement fournit des outils rigoureux pour répondre à ces questions avec exactitude, en évitant les simples estimations ou les raisonnements approximatifs.

Dans ce chapitre, nous apprendrons à utiliser plusieurs techniques fondamentales : le principe additif et multiplicatif, les arrangements, les permutations et les combinaisons. Ces méthodes nous permettront de résoudre des problèmes de plus en plus élaborés, allant de situations concrètes de la vie quotidienne aux bases d'applications en informatique, en probabilités ou encore en cryptographie. L'objectif est de développer une pensée organisée, capable de décomposer un problème en étapes claires afin d'en évaluer le nombre de solutions possibles.

I Ensembles et Cardinaux

Définition 1. *Soit E un ensemble fini.*
On appelle ***cardinal*** *de l'ensemble E et on note $Card(E)$ le nombre d'éléments de E.*

Exemple. Si $E = \{2; 4; 6; 8; 10\}$, alors $Card(E) = 5$.

Définition 2. *Soit E un ensemble quelconque. On dit que F est une* ***partie*** *de E (ou un* ***sous-ensemble*** *de E) si et seulement si tous les éléments de F appartiennent également à E.*
On note alors $F \subset E$ (F « inlus » dans E).

Exemple. Si $E = \{1; 2; 3; 4\}$, $F = \{2; 3\}$ et $G = \{3; 4\}$, alors $F \subset E$, $G \subset E$ mais $G \not\subset F$.

Remarque. L'ensemble vide $\emptyset$ et l'ensemble E lui-même sont des parties de E.

Définition 3. *L'ensemble des parties de E est noté $\mathscr{P}(E)$.*

Exemple. Si $E = \{1; 2; 3\}$, $\mathscr{P}(E) = \{\emptyset; \{1\}; \{2\}; \{3\}; \{1; 2\}; \{1; 3\}; \{2; 3\}; \{1; 2; 3\}\}$.

Définition 4. *Soient A et B deux ensembles quelconques.*

- *La* ***réunion*** *des ensembles A et B, notée $A \cup B$, est l'ensemble des éléments qui appartiennent à A* ***ou*** *à B (ou aux deux).*
- *L'****intersection*** *des ensembles A et B, notée $A \cap B$, est l'ensemble des éléments qui appartiennent à la fois à A* ***et*** *à B.*

Exemple. Si $A = \{a; b; c\}$ et $B = \{a; c; d; e\}$, alors $A \cup B = \{a; b; c; d; e\}$ et $A \cap B = \{a; c\}$.

Définition 5. *Soient A et B deux ensembles non vides.*
Le ***produit cartésien*** *de A par B, noté $A \times B$, est l'ensemble des couples $(a; b)$ où $a \in A$ et $b \in B$.*

Exemple. Si $A = \{1; 2\}$ et $B = \{2; 3; 4\}$, alors :

$$A \times B = \{(1; 2); (1; 3); (1; 4); (2; 2); (2; 3); (2; 4)\}$$

Remarques.

- un couple s'écrit avec des parenthèses et un ensemble avec des accolades.
- l'ordre a de l'importance dans un couple, c'est à dire que les couples $(a; b)$ et $(b; a)$ sont différents, alors que les ensembles $\{a; b\}$ et $\{b; a\}$ sont identiques.
- on définit de même le produit cartésien de 3 ensemble ou plus : $A \times B \times C$ est l'ensemble des triplets $(a; b; c)$ où $a \in A$, $b \in B$ et $c \in C$.
- on définit également $A^n = A \times A \times \ldots \times A$ (n fois). Les éléments de A^n sont appelés des n-uplets.

II Dénombrement

Dénombrer, c'est déterminer le cardinal d'un ensemble donné.

II.1 Principes de base

Propriété 6 (Principe additif)**.**
Si A et B sont deux ensembles finis ***disjoints****, alors :*

$$Card(A \cup B) = Card(A) + Card(B)$$

Remarque. Si A et B ne sont pas disjoints, on a :

$$Card(A \cup B) = Card(A) + Card(B) - Card(A \cap B)$$

Propriété 7 (Principe multiplicatif)**.**
Si A et B sont deux ensembles finis non vides, alors :

$$Card(A \times B) = Card(A) \times Card(B)$$

Exercice 1

Un restaurant propose 4 entrées, 3 plats et 5 desserts.

1. Alban n'a pas très faim et hésite entre une entrée et un plat. Combien a-t-il de choix possibles ?
2. Rose décide de prendre une entrée, un plat et un dessert. Combien a-t-elle de choix possibles ?

II.2 Nombre de listes

Définition 8. *Soit E un ensemble quelconque. Soit p un entier non nul.*
On appelle ***liste*** *de p éléments de E tout p-uplet d'éléments de E.*
L'ensemble des p-uplets d'éléments de E est $E^p = E \times E \times \ldots \times E$ (p fois).

Exemple. Soit $E = \{1; 2; 3\}$. On dit que $(1; 3; 2; 1; 2)$ est un 5-uplet d'éléments de E. On note $(1; 3; 2; 1; 2) \in E^5$.

Propriété 9. *Soit E un ensemble fini de cardinal $n \geqslant 1$. Soit p un entier non nul. Alors :*

$$Card(E^p) = n^p$$

Démonstration. *Par définition du principe multiplicatif.* □

Exemple. Soit $E = \{a; b\}$, de cardinal $n = 2$. Le nombre de listes de 3 éléments de E, ou encore le nombre de p-uplets de E^3, est égal à $2^3 = 8$.

$$E^3 = \{(a;a;a); (a;a;b); (a;b;a); (a;b;b); (b;a;a); (b;a;b); (b;b;a); (b;b;b)\}$$

Exercice 2

Un cadenas est verrouillé par une code à 4 chiffres de 0 à 9.
Combien existe-t-il de combinaisons différentes ?

Exercice 3

Un mot de passe est composé de 8 caractères : des chiffres de 0 à 9 et des lettres majuscules. Combien y a-t-il de mots de passe différents ?

II.3 Nombre d'arrangements

Définition 10. *Soit E un ensemble fini de cardinal $n \geqslant 1$. Soit p un entier naturel tel que $1 \leqslant p \leqslant n$.*
*Un **arrangement** de p éléments de E est une liste de p éléments **distincts** de E.*

Exemple. Soit $E = \{1; 2; 3; 4\}$. Un arrangement de 3 éléments de E est $(2; 4; 1)$.

Propriété 11. *Soit E un ensemble fini de cardinal $n \geqslant 1$. Soit p un entier naturel tel que $1 \leqslant p \leqslant n$.*
Le nombre d'arrangements de p éléments de E est égal à :

$$n \times (n-1) \times (n-2) \times \ldots \times (n-p+1)$$

Exemple. Soit $E = \{1; 2; 3; 4\}$. On a $n = Card(E) = 4$.
Le nombre d'arrangements de $p = 2$ éléments de E est $4 \times 3 = 12$.

1er élément		2ème élément
4	$\times$	3

L'ensemble des arrangements de 2 éléments de E est :

$$\{(1;2); (1;3); (1;4); (2;1); (2;3); (2;4); (3;1); (3;2); (3;4); (4;1); (4;2); (4;3)\}$$

Exercice 4

Une course oppose 8 concurrents. Combien y a-t-il de podiums possibles ?

II.4 Nombre de permutations

Définition 12. *Soit E un ensemble fini de cardinal $n \geqslant 1$.*
*Une **permutation** de E est arrangement de n éléments de E.*

Exemple. Soit $E = \{1; 2; 3\}$. Une permutation de E est $(3; 1; 2)$.
L'ensemble des permutations de E est :

$$\{(1;2;3)\ ;\ (1;3;2)\ ;\ (2;1;3)\ ;\ (2;3;1)\ ;\ (3;1;2)\ ;\ (3;2;1)\}$$

Propriété 13. *Soit E un ensemble fini de cardinal $n \geqslant 1$. Le nombre de permutations de E est égal à :*

$$n \times (n-1) \times (n-2) \times \ldots \times 2 \times 1$$

Remarques.

- Le nombre précédent s'écrit avec la notation **factorielle** :

$$n! = \prod_{k=1}^{n} k = 1 \times 2 \times \ldots \times (n-1) \times n$$

- Avec cette notation, on peut remarquer que le nombre d'arrangements de p éléments dans un ensemble à n éléments s'écrit encore :

$$\frac{n!}{(n-p)!}$$

Exemple. Un ensemble de cardinal $n = 3$ possède $3! = 3 \times 2 \times 1 = 6$ permutations.

Exercice 5

Une course oppose 8 concurrents. Combien y a-t-il de classements possibles ?

Exercice 6

Combien de façons existe-il d'ordonner un paquet de 32 cartes ?

II.5 Nombre de combinaisons

Définition 14. *Soit E un ensemble fini de cardinal n. Soit p un entier tel que $0 \leqslant p \leqslant n$.*
Une ***combinaison*** *de p éléments de E est une partie de E contenant p éléments.*

Exemple. Soit $E = \{1; 2; 3\}$.

- il existe 3 combinaisons de 2 éléments : $\{1; 2\}$ $\{1; 3\}$ $\{2; 3\}$
- il existe 1 combinaison à 0 élément : c'est l'ensemble vide $\emptyset$

Remarque. Contrairement à un arrangement, **l'ordre n'est pas pris en compte** dans une combinaison.

Propriété 15. *Soit E un ensemble fini de cardinal $n \in \mathbb{N}$.*
Soit p un entier tel que $0 \leqslant p \leqslant n$.
Le nombre de combinaisons de p éléments de E est noté $\binom{n}{p}$ (« p parmi n ») et :

$$\binom{n}{p} = \frac{n!}{p!(n-p)!}$$

Exercice 7

Dans un lycée, 10 spécialités différentes sont proposées aux élèves de Première, qui doivent en choisir 3. Combien y a-t-il de « triplettes » possibles ?

Exercice 8

On pioche 8 cartes dans un jeu de 32 cartes. Combien y a-t-il de combinaisons possibles ?

II.6 Nombre de parties

Propriété 16. *Soit E un ensemble fini de cardinal $n \in \mathbb{N}$. Alors :*

$$Card(\mathscr{P}(E)) = \sum_{p=0}^{n} \binom{n}{p} = 2^n$$

Démonstration.

- *En premier lieu, remarquons que le nombre de parties de E est la somme du nombre de parties à 0 élément, 1 élément, 2 éléments... jusqu'à n éléments.*

  Or, choisir une partie à p éléments dans un ensemble E possédant n éléments, c'est choisir une combinaison de p éléments parmi n : il y en a $\binom{n}{p}$. Ainsi :

$$Card(\mathscr{P}(E)) = \sum_{p=0}^{n} \binom{n}{p}$$

- *Pour former une partie de E, on peut associer à chaque élément de E le nombre 0 ou 1, signifiant que l'élément appartient ou non à la partie que l'on veut former. Choisir une partie de E est donc équivalent à choisir une liste de n éléments de l'ensemble $\{0; 1\}$. Il y a $Card(\{0; 1\})^n = 2^n$ façons de faire. Ainsi :*

$$Card(\mathscr{P}(E)) = 2^n$$

□

Exercice 9

Dénombrer et lister les parties de $E = \{1; 2; 3; 4\}$.

Exercice 10

Un glacier propose 10 parfums de glace différents.
Chaque client peut composer sa glace en choisissant autant de parfums qu'il le souhaite.
Combien y a-t-il de combinaisons de parfums différentes ?

III Quelques résultats sur $\binom{n}{p}$

Propriété 17.

- *Pour tout entier naturel n :*

$$\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1 \qquad \binom{n}{1} = \binom{n}{n-1} = n$$

- *Pour tous entiers naturels n et p tels que $p \leqslant n$:*

$$\binom{n}{p} = \binom{n}{n-p}$$

Remarque. La dernière propriété peut se comprendre ainsi : choisir p élèves dans une classe de n élèves et les emmener en voyage, c'est en choisir $n - p$ qui resteront au lycée !

Propriété 18 (relation de Pascal)**.**
Pour tous entiers n et p tels que $1 \leqslant p \leqslant n-1$:

$$\binom{n}{p} + \binom{n}{p+1} = \binom{n+1}{p+1}$$

Remarque. Cette dernière relation permet de calculer **récursivement** les coefficients binomiaux. Le **triangle** de Pascal en est une représentation adaptée.

Exercice 11

Compléter le tableau suivant pour y faire apparaître le triangle de Pascal. ✍

$n \backslash p$	0	1	2	3	4	5
0						
1						
2						
3						
4						
5						

Chapitre 3 : Combinatoire et Dénombrement

Exercices de cours

Principes de base

Exercice 01 Un restaurant propose 4 entrées, 3 plats et 5 desserts.

1. Alban n'a pas très faim et hésite entre une entrée et un plat. Combien a-t-il de choix possibles ?
2. Rose décide de prendre une entrée, un plat et un dessert. Combien a-t-elle de choix possibles ?

Nombre de listes

Exercice 02 Un cadenas est verrouillé par une code à 4 chiffres de 0 à 9. Combien existe-t-il de combinaisons différentes ?

Exercice 03 Un mot de passe est composé de 8 caractères : des chiffres de 0 à 9 et des lettres majuscules. Combien y a-t-il de mots de passe différents ?

Nombre d'arrangements

Exercice 04 Une course oppose 8 concurrents. Combien y a-t-il de podiums possibles ?

Nombre de permutations

Exercice 05 Une course oppose 8 concurrents. Combien y a-t-il de classements possibles ?

Exercice 06 Combien de façons existe-il d'ordonner un paquet de 32 cartes ?

Nombre de combinaisons

Exercice 07 Dans un lycée, 10 spécialités différentes sont proposées aux élèves de Première, qui doivent en choisir 3. Combien y a-t-il de « triplettes » possibles ?

Exercice 08 De combien de façons différentes peut-on tirer 8 cartes dans un paquet de 32 cartes ?

Nombre de parties

Exercice 09 Dénombrer et lister les parties de $E = \{1; 2; 3; 4\}$.

Exercice 10 Un glacier propose 10 parfums de glace différents. Chaque client peut composer sa glace en choisissant autant de parfums qu'il le souhaite. Combien y a-t-il de combinaisons de parfums différentes ?

Exercice 11 Compléter le tableau suivant pour y faire apparaître le triangle de Pascal.

$n \backslash p$	0	1	2	3	4	5
0						
1						
2						
3						
4						
5						