

Exercices : Dénombrement

Ensembles et Cardinaux

Exercice 01 Expliciter chacun des ensembles suivants, en précisant son cardinal :

1. A est l'ensemble des diviseurs de 18.
2. B est l'ensemble des nombres premiers inférieurs ou égaux à 20.
3. $C = \{n \in \mathbb{N} / n^2 \leq 37\}$
4. $D = \{(x; y) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} / x + y = 6\}$
5. $E = \{(x; y; z) \in \mathbb{N}^3 / x + y + z = 3\}$

Exercice 02 Dans chacun des cas suivants, donner $A \cap B$, $A \cup B$, $A \times B$ ainsi que le cardinal de chacun de ces ensembles.

1. $A = \{1; 2\}$ et $B = \{1; 2; 5\}$
2. $A = \{a; b; c\}$ et $B = \{\alpha; \beta; \gamma\}$

Listes

Exercice 03 Un exercice de type « Vrai ou Faux » comporte 10 affirmations. Combien existe-t-il de façons différentes de répondre à ces affirmations ?

Exercice 04 Combien existe-t-il de numéros de téléphone commençant par 06 ?

Exercice 05 Une adresse IPV4 est composée de 4 nombres de 0 à 255 séparés par un point, comme 217.70.190.29. Combien existe-t-il d'adresses IPV4 différentes ?

Arrangements et Permutations

Exercice 06 Une urne contient des jetons numérotés de 1 à 5. On tire successivement, et sans remise, 2 jetons de l'urne. Combien existe-t-il de tirages différents, l'ordre étant pris en compte ?

Exercice 07 Une course oppose 18 concurrents. Combien existe-t-il de podiums différents ?

Exercice 08 Marc a 5 poules dans son poulailler. Il décide de classer ses poules, de la plus belle à la moins belle. Combien existe-t-il de classements différents ?

Combinaisons

Exercice 09 Calculer (sans calculatrice!) :

$$\frac{21!}{20!} \quad \frac{17!}{15!} \quad \frac{7! \times 5!}{10!} \quad \frac{1}{5!} - \frac{42}{7!} \quad \frac{9!}{5! \times 4!}$$

- Exercice 10**
1. Représenter le triangle de Pascal de $n = 0$ à $n = 6$.
 2. Comment se traduit « graphiquement » la formule du cours $\sum_{p=0}^n \binom{n}{p} = 2^n$?
 3. Calculer les nombres suivants :

$$\binom{6}{2} \quad \binom{12}{8} \quad \frac{\binom{7}{5}}{\binom{9}{6}} \quad \frac{\binom{5}{3} \times \binom{6}{4}}{\binom{9}{3}}$$

Exercice 11 Combien peut-on faire d'équipes de 5 personnes avec 10 personnes ?

Exercice 12 Un tournoi compte 8 équipes engagées. Chaque équipe doit rencontrer toutes les autres une et une seule fois. Combien y a-t-il de rencontres ?

Parties d'un ensemble

Exercice 13 Soit $E = \{1; a; 5\}$.

1. Quel est le cardinal de $\mathcal{P}(E)$?
2. Énumérer les parties de E .

Un peu de tout

Exercice 14 Lucie a dans sa garde-robe 4 jupes, 5 chemisiers et 3 vestes. Elle choisit au hasard une jupe, un chemisier et une veste. De combien de façons différentes peut-elle s'habiller ?

Exercice 15 Une course hippique oppose 12 chevaux.

1. Combien y a-t-il de tiercés dans l'ordre ? dans le désordre ?
2. Combien y a-t-il de quintés dans l'ordre ? dans le désordre ?

Exercice 16 Une assemblée de 20 personnes doit élire un comité de 4 membres : un président, un vice-président, un trésorier et un secrétaire. Combien de comités différents peut-elle élire ?

Exercice 17 En France, chaque véhicule est immatriculé à l'aide d'un code au format *SIV*, composé de sept caractères : deux lettres, trois chiffres et deux lettres, par exemple *AB-123-CD*.

1. Combien peut-on immatriculer de véhicules ainsi ?
2. En réalité, les lettres *L*, *I* et *U* sont exclues, tout comme la suite de chiffres *000*. De plus, les séries de lettres *SS* et *WW* sont exclues du bloc de gauche, et *SS* du bloc de droite.

Combien peut-on réellement immatriculer de véhicules en France ?

Exercice 18

1. Au Loto, on choisit 5 nombres de 1 à 50, ainsi qu'un numéro Chance allant de 1 à 10.

Combien y a-t-il de tirages différents ?

2. À l'Euromillions, on rajoute un second numéro chance.

Combien y a-t-il de tirages différents ?

Exercice 19 Un QCM se compose de 5 questions comportant chacune 4 réponses. Combien y a-t-il de façons différentes de répondre au QCM sachant que :

1. chaque question admet une seule bonne réponse ?
2. chaque question admet entre 0 et 2 bonnes réponses ?

Exercice 20 20 élèves entrent dans une salle comportant 30 places. Combien y a-t-il de plans de classe différents ?

Exercice 21 Sophie range ses 14 livres de 4 matières différentes : 4 livres de Mathématiques, 5 livres d'Économie, 3 de Philosophie, et 2 d'Anglais.

1. De combien de façons peut-elle les ranger si elle ne tient pas compte de l'ordre ?
2. ★ De combien de façons peut-elle les ranger si elle les range par matière ?

Exercice 22 On considère la liste des entiers de 0 à 999.

1. Parmi ces nombres, combien contiennent le chiffre 2 ?
2. Combien le chiffre 2 apparaît-il de fois dans cette liste ?

Exercice 23 On pioche au hasard 8 cartes dans un jeu de 32 cartes. Quelle est la probabilité d'avoir des cartes d'une seule et même couleur ?

Exercice 24 ★ Un méchant professeur choisit 3 élèves au hasard dans votre classe et les punit.

Quelle est la probabilité que vous soyez puni ?

Exercice 25 ★ Sur une feuille, on trace 5 droites de façon à ce que 2 droites ne soient jamais parallèles, et 3 droites ne soient jamais concourantes. Combien de triangles forme-t-on ainsi ?

Exercice 26 Sur un échiquier 4×4 , on place 3 tours sur des cases différentes.

1. De combien de façons peut-on les placer ?
2. De combien de façons peut-on les placer de sorte qu'elles ne puissent pas « se manger » ?

Coefficients binomiaux

Exercice 27 Simplifier :

$$\frac{(2n+1)!}{(2n-1)!} \quad \frac{1}{n!} - \frac{1}{(n+1)!} \quad \frac{(n-1)!}{n!} - \frac{n!}{(n+1)!}$$

Exercice 28 Résoudre dans \mathbb{N} les équations suivantes :

$$1. \binom{n}{2} = 36 \quad 2. 3 \times \binom{n}{4} = 14 \times \binom{n}{2}$$