

# Exercices : Dénombrement

## Ensembles et Cardinaux

**Exercice 01** Expliciter chacun des ensembles suivants, en précisant son cardinal :

1.  $A$  est l'ensemble des diviseurs de 18.
2.  $B$  est l'ensemble des nombres premiers inférieurs ou égaux à 20.
3.  $C = \{n \in \mathbb{N} / n^2 \leq 37\}$
4.  $D = \{(x; y) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} / x + y = 6\}$
5.  $E = \{(x; y; z) \in \mathbb{N}^3 / x + y + z = 3\}$

**Exercice 02** Dans chacun des cas suivants, donner  $A \cap B$ ,  $A \cup B$ ,  $A \times B$  ainsi que le cardinal de chacun de ces ensembles.

1.  $A = \{1; 2\}$  et  $B = \{1; 2; 5\}$
2.  $A = \{a; b; c\}$  et  $B = \{\alpha; \beta; \gamma\}$

## Listes

**Exercice 03** Un exercice de type « Vrai ou Faux » comporte 10 affirmations. Combien existe-t-il de façons différentes de répondre à ces affirmations ?

**Exercice 04** Combien existe-t-il de numéros de téléphone commençant par 06 ?

**Exercice 05** Une adresse IPV4 est composée de 4 nombres de 0 à 255 séparés par un point, comme 217.70.190.29.  
Combien existe-t-il d'adresses IPV4 différentes ?

## Arrangements et Permutations

**Exercice 06** Une urne contient des jetons numérotés de 1 à 5. On tire successivement, et sans remise, 2 jetons de l'urne.  
Combien existe-t-il de tirages différents, l'ordre étant pris en compte ?

**Exercice 07** Une course oppose 18 concurrents. Combien existe-t-il de podiums différents ?

**Exercice 08** Marc a 5 poules dans son poulailler. Il décide de classer ses poules, de la plus belle à la moins belle.  
Combien existe-t-il de classements différents ?

## Combinatoires

**Exercice 09** Calculer (sans calculatrice !) :

$$\frac{21!}{20!} \quad \frac{17!}{15!} \quad \frac{7! \times 5!}{10!} \quad \frac{1}{5!} - \frac{42}{7!} \quad \frac{9!}{5! \times 4!}$$

**Exercice 10** 1. Représenter le triangle de Pascal de  $n = 0$  à  $n = 6$ .  
2. Comment se traduit « graphiquement » la formule du cours  $\sum_{p=0}^n \binom{n}{p} = 2^n$  ?  
3. Calculer les nombres suivants :

$$\binom{6}{2} \quad \binom{12}{8} \quad \frac{\binom{7}{5}}{\binom{9}{6}} \quad \frac{\binom{5}{3} \times \binom{6}{4}}{\binom{9}{3}}$$

**Exercice 11** Combien peut-on faire d'équipes de 5 personnes avec 10 personnes ?

**Exercice 12** Un tournoi compte 8 équipes engagées. Chaque équipe doit rencontrer toutes les autres une et une seule fois. Combien y a-t-il de rencontres ?

## Parties d'un ensemble

**Exercice 13** Soit  $E = \{1; a; 5\}$ .

1. Quel est le cardinal de  $\mathcal{P}(E)$  ?
2. Énumérer les parties de  $E$ .

## Un peu de tout

**Exercice 14** Lucie a dans sa garde-robe 4 jupes, 5 chemisiers et 3 vestes. Elle choisit au hasard une jupe, un chemisier et une veste.  
De combien de façons différentes peut-elle s'habiller ?

**Exercice 15** Une course hippique oppose 12 chevaux.

1. Combien y a-t-il de tiercés dans l'ordre ? dans le désordre ?
2. Combien y a-t-il de quintés dans l'ordre ? dans le désordre ?

**Exercice 16** Une assemblée de 20 personnes doit élire un comité de 4 membres : un président, un vice-président, un trésorier et un secrétaire.  
Combien de comités différents peut-elle élire ?

**Exercice 17** En France, chaque véhicule est immatriculé à l'aide d'un code au format SIV, composé de sept caractères : deux lettres, trois chiffres et deux lettres, par exemple AB-123-CD.

1. Combien peut-on immatriculer de véhicules ainsi ?
2. En réalité, les lettres  $L$ ,  $I$  et  $U$  sont exclues, tout comme la suite de chiffres 000. De plus, les séries de lettres SS et WW sont exclues du bloc de gauche, et SS du bloc de droite.

Combien peut-on réellement immatriculer de véhicules en France ?

**Exercice 18**

1. Au Loto, on choisit 5 nombres de 1 à 50, ainsi qu'un numéro Chance allant de 1 à 10.

Combien y a-t-il de tirages différents ?

2. À l'Euromillions, on rajoute un second numéro chance.

Combien y a-t-il de tirages différents ?

**Exercice 19** Un QCM se compose de 5 questions comportant chacune 4 réponses. Combien y a-t-il de façons différentes de répondre au QCM sachant que :

1. chaque question admet une seule bonne réponse ?
2. chaque question admet entre 0 et 2 bonnes réponses ?

**Exercice 20** 20 élèves entrent dans une salle comportant 30 places. Combien y a-t-il de plans de classe différents ?

**Exercice 21** Sophie range ses 14 livres de 4 matières différentes : 4 livres de Mathématiques, 5 livres d'Économie, 3 de Philosophie, et 2 d'Anglais.

1. De combien de façons peut-elle les ranger si elle ne tient pas compte de l'ordre ?
2. ★ De combien de façons peut-elle les ranger si elle les range par matière ?

**Exercice 22** On considère la liste des entiers de 0 à 999.

1. Parmi ces nombres, combien contiennent le chiffre 2 ?
2. Combien le chiffre 2 apparaît-il de fois dans cette liste ?

**Exercice 23** On pioche au hasard 8 cartes dans un jeu de 32 cartes. Quelle est la probabilité d'avoir des cartes d'une seule et même couleur ?

**Exercice 24** ★ Un méchant professeur choisit 3 élèves au hasard dans votre classe et les punit.

Quelle est la probabilité que vous soyez puni ?

**Exercice 25** ★ Sur une feuille, on trace 5 droites de façon à ce que 2 droites ne soient jamais parallèles, et 3 droites ne soient jamais concourantes.

Combien de triangles forme-t-on ainsi ?

**Exercice 26** Sur un échiquer  $4 \times 4$ , on place 3 tours sur des cases différentes.

1. De combien de façons peut-on les placer ?
2. De combien de façons peut-on les placer de sorte qu'elles ne puissent pas « se manger » ?

## Coefficients binomiaux

**Exercice 27** Simplifier :

$$\frac{(2n+1)!}{(2n-1)!} - \frac{1}{n!} - \frac{1}{(n+1)!} = \frac{(n-1)!}{n!} - \frac{n!}{(n+1)!}$$

**Exercice 28** Résoudre dans  $\mathbb{N}$  les équations suivantes :

$$1. \binom{n}{2} = 36 \quad 2. 3 \times \binom{n}{4} = 14 \times \binom{n}{2}$$