Exercices : Loi binomiale

Exercice 01 Parmi les situations suivantes, dire si c'est un schéma de Bernoulli, et donner dans ce cas :

- l'épreuve de Bernoulli et le succès correspondants
- les paramètres n (nombre d'épreuves) et p (probabilité de succès)

1. On lance 5 fois un dé bien équilibré, et on compte le nombre de 4 obtenus.
2. On pioche 6 fois au hasard et sans remise une boule dans une urne composée de 5 boules vertes et 6 boules rouges, et on compte le nombre de boules rouges obtenues.
3. On pioche 4 cartes au hasard dans un jeu de 32 cartes, en remettant à chaque fois la carte piochée dans le paquet, et on compte le nombre de coeurs obtenus.
4. On lance 12 fois une même pièce de monnaie truquée, tombant 2 fois plus souvent sur PILE que sur FACE, et on compte le nombre de PILE obtenus.
5. On lance 5 fois un dé cubique bien équilibré et on fait la somme des 5 résultats obtenus.

Exercice 02 **Sans calculatrice !**
Calculer les coefficients binomiaux suivants, en utilisant certaines propriétés ou le triangle de Pascal :

$$\binom{3}{1} \;;\; \binom{4}{2} \;;\; \binom{4}{4} \;;\; \binom{5}{3} \;;\; \binom{7}{0} \;;\; \binom{6}{3}$$

Exercice 03 Calculer les coefficients binomiaux suivants à l'aide de la calculatrice :

$$\binom{52}{4} \;;\; \binom{24}{20} \;;\; \binom{13}{7}$$

Exercice 04 **Sans calculatrice !**
Dans chacun des cas suivants, X suit une loi binomiale de paramètres $(n;p)$. Calculer $p(X=k), E(X)$ et $\sigma(X)$:

1. $n=2 \;;\; p=\dfrac{1}{2} \;;\; k=1$
2. $n=3 \;;\; p=\dfrac{1}{4} \;;\; k=2$
3. $n=4 \;;\; p=0,2 \;;\; k=2$
4. $n=6 \;;\; p=0,4 \;;\; k=4$

Exercice 05 X suit une loi binomiale de paramètres $n=35$ et $p=0,71$. Calculer, à 10^{-3} près :

1. $p(X=25)$
2. $p(X=30)$
3. $p(X \geqslant 18)$
4. $p(X>20)$
5. $p(X \leqslant 30)$
6. $p(X<27)$

Exercice 06 On lance 10 fois une pièce de monnaie bien équilibrée, et on note X le nombre de PILE obtenus.

1. Quelle loi suit la variable aléatoire X ? Justifier.
2. Donner la loi de probabilité de X.
3. Calculer $p(X \geqslant 3)$.
4. Calculer $E(X)$. Ce résultat est-il surprenant ?

Exercice 07 Un pépiniériste conditionne des bulbes de fleurs .On conviendra qu'un bulbe germe s'il donne naissance à une plante qui fleurit. On considère que le pépiniériste dispose d'un très grand nombre de bulbes et que la probabilité qu'un bulbe germe est de 0,83. Il prélève au hasard successivement quinze bulbes de ce stock. On note X la variable aléatoire correspondant au nombre de bulbes qui germent.

1. Quelle est la loi de probabilité de X ?
2. Quelle est la probabilité qu'exactement 5 bulbes choisis germent ?

3. Quelle est la probabilité qu'au moins 9 bulbes germent ?
4. En moyenne, sur un prélèvement de 15 bulbes, combien vont germer ?

Exercice 08 On lance plusieurs fois une pièce de monnaie bien équilibrée. A-t-on plus de chances d'obtenir 10 PILE en 20 lancers ou 15 PILE en 30 lancers ?

Exercice 09 Une classe compte 30 élèves dont 20 filles. A chaque cours de mathématiques, le professeur interroge au hasard un élève de la classe, sans se rappeler quels élèves il a déjà interrogés.
On considère un entier naturel n et on note X la variable aléatoire qui correspond au nombre de filles interrogées au cours de n jours consécutifs.

1. Quelle est la loi de probabilité de X ?
2. Quelle est la probabilité que sur 10 jours consécutifs, soient interrogées 4 filles exactement ?
3. Quelle est la probabilité que sur 10 jours consécutifs, soient interrogées au moins 4 filles ?
4. Quel doit être le nombre minimal de jours consécutifs pour que la probabilité qu'aucune fille ne soit interrogée soit inférieure à 0,001 ?

Exercice 10 Une urne contient 5 boules blanches et 4 boules rouges indiscernables au toucher. On effectue n tirages successifs d'une boule avec remise.

1. Déterminer en fonction de n la probabilité p_n de tirer au moins une boule blanche en n tirages.
2. Pour quelles valeurs de n a-t-on $p_n \geqslant 0,99$?

Exercice 11 ***Métropole - 15 mars 2021 - Sujet 1***

Dans une école de statistique, après étude des dossiers des candidats, le recrutement se fait de deux façons :

- 10 % des candidats sont sélectionnés sur dossier. Ces candidats doivent ensuite passer un oral à l'issue duquel 60 % d'entre eux sont finalement admis à l'école.
- Les candidats n'ayant pas été sélectionnés sur dossier passent une épreuve écrite à l'issue de laquelle 20 % d'entre eux sont admis à l'école.

Partie 1

On choisit au hasard un candidat à ce concours de recrutement. On notera :

- D l'évènement « le candidat a été sélectionné sur dossier » ;
- A l'évènement « le candidat a été admis à l'école » ;
- $\overline{D}$ et $\overline{A}$ les évènements contraires des évènements D et A respectivement.

1. Traduire la situation par un arbre pondéré.
2. Calculer la probabilité que le candidat soit sélectionné sur dossier et admis à l'école.
3. Montrer que la probabilité de l'évènement A est égale à $0,24$.
4. On choisit au hasard un candidat admis à l'école. Quelle est la probabilité que son dossier n'ait pas été sélectionné ?

Partie 2

1. On admet que la probabilité pour un candidat d'être admis à l'école est $0,24$.

   On considère un échantillon de sept candidats choisis au hasard, en assimilant ce choix à un tirage au sort avec remise. On désigne par X la variable aléatoire dénombrant les candidats admis à l'école parmi les sept tirés au sort.

   (a) On admet que la variable aléatoire X suit une loi binomiale. Quels sont les paramètres de cette loi ?
   (b) Calculer la probabilité qu'un seul des sept candidats tirés au sort soit admis à l'école. On donnera une réponse arrondie au centième.
   (c) Calculer la probabilité qu'au moins deux des sept candidats tirés au sort soient admis à cette école. Arrondir au centième.

2. Un lycée présente n candidats au recrutement dans cette école, où n est un entier naturel non nul.

   On admet que la probabilité pour un candidat quelconque du lycée d'être admis à l'école est égale à $0,24$ et que les résultats des candidats sont indépendants les uns des autres.

   (a) Donner l'expression, en fonction de n, de la probabilité qu'aucun candidat issu de ce lycée ne soit admis à l'école.
   (b) À partir de quelle valeur de l'entier n la probabilité qu'au moins un élève de ce lycée soit admis à l'école est-elle supérieure ou égale à $0,99$?