Travail en Groupe : Loi Binomiale

Sujet A *: Contrôles anti-dopage*

Un laboratoire pharmaceutique vient d'élaborer un nouveau test anti-dopage.

Partie A

Une étude sur ce nouveau test donne les résultats suivants :

- si un athlète est dopé, la probabilité que le résultat du test soit positif est $0,98$ (sensibilité du test) ;
- si un athlète n'est pas dopé, la probabilité que le résultat du test soit négatif est $0,995$ (spécificité du test).

On fait subir le test à un athlète sélectionné au hasard au sein des participants à une compétition d'athlétisme.
On note D l'évènement « l'athlète est dopé » et T l'évènement « le test est positif ».
On admet que la probabilité de l'évènement D est égale à 0,08.

1. Traduire la situation sous la forme d'un arbre pondéré.
2. Calculer $p(T)$.
3. (a) Sachant qu'un athlète présente un test positif, quelle est la probabilité qu'il soit dopé ? Arrondir à 10^{-3}.

   (b) Le laboratoire décide de commercialiser le test si la probabilité de l'évènement « un athlète présentant un test positif est dopé » est supérieure ou égale à $0,95$.

   Le test proposé par le laboratoire sera-t-il commercialisé ? Justifier.

Partie B

Dans une compétition sportive, la probabilité qu'un athlète contrôlé présente un test positif est $0,083$.

1. Dans cette question, on suppose que les organisateurs décident de contrôler 5 athlètes au hasard parmi les athlètes de cette compétition.

   On note X la variable aléatoire égale au nombre d'athlètes présentant un test positif parmi les 5 athlètes contrôlés.

   (a) Donner la loi suivie par la variable aléatoire X. Préciser ses paramètres.

   (b) Calculer l'espérance $E(X)$ et interpréter le résultat dans le contexte de l'exercice.

   (c) Quelle est la probabilité qu'au moins un des 5 athlètes contrôlés présente un test positif ?

2. Combien d'athlètes faut-il contrôler au minimum pour que la probabilité de l'évènement « au moins un athlète contrôlé présente un test positif » soit supérieure ou égale à $0,75$? Justifier.

Travail en Groupe : Loi Binomiale

Sujet B *: Trotinettes*

Dans une grande ville française, des trottinettes électriques sont mises à disposition des usagers. Une entreprise, chargée de l'entretien du parc de trottinettes, contrôle leur état chaque lundi.

Partie A

On estime que :

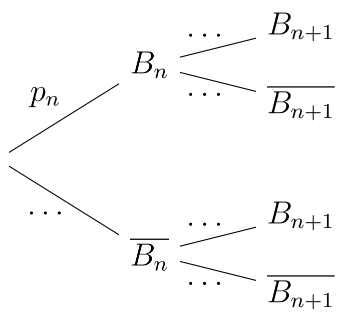
- lorsqu'une trottinette est en bon état un lundi, la probabilité qu'elle soit encore en bon état le lundi suivant est $0,9$;
- lorsqu'une trottinette est en mauvais état un lundi, la probabilité qu'elle soit en bon état le lundi suivant est $0,4$.

On s'intéresse à l'état d'une trottinette lors des phases de contrôle.
Soit n un entier naturel. On note B_n l'évènement « la trottinette est en bon état n semaines après sa mise en service » et p_n la probabilité de B_n.
Lors de sa mise en service, la trottinette est en bon état. On a donc $p_0 = 1$.

1. Donner p_1 et montrer que $p_2 = 0,85$.

   On pourra s'appuyer sur un arbre pondéré.

2. Recopier et compléter l'arbre pondéré ci-dessous :



3. En déduire que, pour tout entier naturel n, $p_{n+1} = 0,5p_n + 0,4$.
4. (a) Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n, $p_n \geqslant 0,8$.
   (b) À partir de ce résultat, quelle communication l'entreprise peut-elle envisager pour valoriser la fiabilité du parc ?
5. (a) On considère la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n par $u_n = p_n - 0,8$.
   Montrer que (u_n) est une suite géométrique dont on donnera le premier terme et la raison.
   (b) En déduire l'expression de u_n puis de p_n en fonction de n.

Partie B

Dans cette partie, on modélise la situation de la façon suivante :

- l'état d'une trottinette est indépendant de celui des autres ;
- la probabilité qu'une trottinette soit en bon état est égale à $0,8$.

On note X la variable aléatoire qui, à un lot de 15 trottinettes, associe le nombre de trottinettes en bon état. Le nombre de trottinettes du parc étant très important, le prélèvement de 15 trottinettes peut être assimilé à un tirage avec remise.

Les probabilités seront données à 10^{-3} près.

1. Justifier que X suit une loi binomiale et préciser les paramètres de cette loi.
2. Calculer la probabilité que les 15 trottinettes soient en bon état.
3. Calculer la probabilité qu'au moins 10 trottinettes soient en bon état dans un lot de 15.
4. Calculer $E(X)$ et interpréter le résultat.

Travail en Groupe : Loi Binomiale

Sujet C *: Surréservation*

En 2016, la compagnie aérienne EasyJet a déclaré que 2,6 millions de ses passagers ne se sont pas présentés pour leur vol. C'est loin d'être anecdotique puisque cela représente tout de même 3,5% des passagers. Sur un vol de 200 places, ce sont en moyenne 7 voyageurs ratent leur avion, certains pour de bonnes raisons, d'autres pour de moins bonnes.
De cette constation (EasyJet n'a rien inventé) est née l'idée tout à fait légale du *surbooking* ou de la *surréservation* en français : vendre un nombre de places (de transport, de spectacle, d'hébergement...) supérieur à la quantité réellement disponible, en dédommageant les éventuels passagers laissés sur le tarmac...

1. Dans cette question, on considère un avion de 100 places. On suppose que la probabilité qu'un passager ne se présente pas le jour de l'embarquement est égale à 3,5%, et que la présence ou non d'un passager le jour J est complètement indépendante de la présence des autres passagers.

   On appelle X le nombre de passagers présents à l'embarquement, et on sait que toutes les places ont été vendues.

   (a) Quelle est la loi suivie par X ? Justifier la réponse. Donner les paramètres de cette loi.
   (b) Quelle est la probabilité que tous les passagers se présentent à l'embarquement ?
   (c) Quelle est la probabilité qu'au moins 95 passagers se présentent à l'embarquement ?
   (d) En moyenne, combien de passagers se présentent à l'embarquement ?

2. La compagnie décide de mettre en vente 3 places supplémentaires, qui se vendent très rapidement.

   On appelle Y le nombre de passagers présents à l'embarquement, sachant que les 103 places ont été vendues.

   (a) On admet que Y suit encore une loi binomiale. Donner ses paramètres.
   (b) Calculer la probabilité qu'au moins un passager ne dispose pas de place dans l'avion.
   (c) On suppose qu'une place est vendue 200€, et qu'un passager ne pouvant pas embarquer dans l'avion pour cause de surbooking est dédommagé à hauteur de 800€.

       On appelle G la variable aléatoire égale au gain algébrique réalisé par la compagnie aérienne grâce au surbooking.

       Donner la loi de probabilité de G.
   (d) Calculer E(G). La compagnie aérienne est-elle gagnante en faisant du surbooking ?

3. On suppose cette fois-ci que la compagnie décide de vendre 5 places supplémentaires.

   Est-ce plus avantageux pour elle ?