Chapitre 5 : Primitives

Table des matières

Notions au programme

- Équation différentielle $y' = f$.
- Notion de primitive d'une fonction continue sur un intervalle.
- Deux primitives d'une même fonction continue sur un intervalle diffèrent d'une constante.
- Primitives des fonctions de référence.

La notion de primitive en mathématiques désigne une fonction F telle que sa dérivée F' est égale à une fonction donnée f. Cette relation inverse de la dérivée permet de retrouver une fonction à partir de sa pente ou de son taux de variation instantané. Puisque la dérivée d'une constante est nulle, les primitives d'une même fonction diffèrent toujours d'une constante additive, ce qui implique une infinité de primitives pour une fonction donnée.

Les primitives ont de nombreuses applications en mathématiques et dans les sciences. Elles sont fondamentales pour le calcul intégral, notamment dans le calcul des aires sous une courbe par le théorème fondamental de l'analyse, qui relie l'intégrale définie d'une fonction à ses primitives. De plus, elles sont utilisées pour résoudre des équations différentielles, qui modélisent de nombreux phénomènes physiques, biologiques ou économiques. Par exemple, déterminer la primitive d'une fonction vitesse permet d'obtenir la fonction position d'un objet. Ainsi, la notion de primitive est un outil clé pour comprendre et modéliser l'évolution de systèmes variables dans le temps ou l'espace.

I Notion de primitive

Définition 1. *Soit f une fonction définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$. On appelle* ***primitive*** *de f sur I toute fonction F* ***dérivable sur*** *I, telle que :*

$$\forall x \in I, \quad F'(x) = f(x)$$

Exemple. Si $f(x) = 2x$, une primitive de f est la fonction F définie par $F(x) = x^2$.

II Ensemble des primitives

Remarque. Considérons les fonctions F et G définies par $F(x) = x^2$ et $G(x) = x^2 + 1$.
$F'(x) = G'(x) = 2x$: F et G sont donc des primitives de la fonction $f : x \longrightarrow 2x$.

Théorème 2. *Soit f une fonction admettant une primitive F sur un intervalle I. Alors :*

- *pour tout réel k, la fonction $G : x \longrightarrow F(x) + k$ est une primitive de f sur I*
- *toute primitive de f sur I est de ce type*

Démonstration. *Soit F une primitive de f sur I.*
Si G est la fonction définie par $G(x) = F(x) + k$, alors pour tout $x \in I$, $G'(x) = F'(x) = f(x)$, et G est donc une primitive de f sur I.
Réciproquement, soit G une primitive de f sur I. Pour tout $x \in I$, on a $(G - F)'(x) = G'(x) - F'(x) = f(x) - f(x) = 0$. La fonction $G - F$ est donc constante sur I.
Autrement dit, il existe un réel k tel que pour tout $x \in I$, $G(x) = F(x) + k$. □

Théorème 3. *Soit f une fonction admettant une primitive sur un intervalle I.*
Soient $x_0 \in I$ et $y_0 \in \mathbb{R}$.
Il existe une unique primitive F de f sur I telle que $F(x_0) = y_0$.

Démonstration. *Soit F une primitive de f sur I. Montrons l'existence et l'unicité d'une primitive G de f vérifiant $G(x_0) = y_0$.*
Existence : la fonction $G : x \longrightarrow F(x) + y_0 - F(x_0)$ est encore une primitive de f, et telle que $G(x_0) = y_0$.
Unicité : supposons l'existence d'une primitive H de f telle que $H(x_0) = y_0$. G et H étant deux primitives de f, elles ne diffèrent que d'une constante. Il existe donc un réel k tel que, pour tout $x \in I$, $H(x) = G(x) + k$. En particulier, pour $x = x_0$:

$$H(x_0) = G(x_0) + k \implies y_0 = y_0 + k \implies k = 0$$

D'où $H = G$. L'unicité est démontrée. □

Exercice 1

Déterminer la primitive de la fonction $f : x \longrightarrow 4x + 1$ s'annulant en 1. ✍

III Primitives usuelles

Les tableaux suivants donnent les primitives des fonctions usuelles et des opérations sur les primitives :

Fonction	Primitive	Intervalle
$x \mapsto a \in \mathbb{R}$	$x \mapsto ax$	$\mathbb{R}$
$x \mapsto x^n \quad , \quad n \neq -1$	$x \mapsto \frac{x^{n+1}}{n+1}$	$]0\,;+\infty[$
$x \mapsto \frac{1}{x}$	$x \mapsto \ln x$	$]0\,;+\infty[$
$x \mapsto e^x$	$x \mapsto e^x$	$\mathbb{R}$

Fonction	Primitive	Intervalle
$au' \quad , \quad a \in \mathbb{R}$	au	
$u' + v'$	$u + v$	
$u'e^u$	e^u	
$u^n\, u' \quad , \quad n \neq -1$	$\dfrac{u^{n+1}}{n+1}$	sur tout intervalle où $u(x) \neq 0$

Exercice 2

Déterminer une primitive de la fonction $f : x \mapsto 2x^3 + 2x + 1$. ✍

Exercice 3

Déterminer la primitive F de la fonction $f : x \mapsto xe^{x^2}$ vérifiant $F(1) = e$. ✍