Chapitre 6 : Suites

Table des matières

Notions au programme

- Suites convergentes et divergentes.
- Limites et comparaison, théorème des gendarmes.
- Opérations sur les limites.
- Comportement de (q^n) où $q \in \mathbb{R}$.
- Théorème de convergence monotone.

Les suites trouvent leurs racines dans l'étude des nombres successifs indexés par les entiers naturels. Historiquement, des mathématiciens comme Héron d'Alexandrie et Bombelli ont utilisé des suites pour approcher des racines carrées et expliquer des phénomènes progressifs, ce qui a permis d'introduire la notion de limite finie d'une suite, un concept central en analyse. Avec le développement de l'analyse numérique au XXe siècle, les suites sont devenues cruciales dans l'approximation et le calcul, notamment grâce à la méthode des éléments finis et à l'évolution des ordinateurs.

On utilise les suites pour modéliser de nombreux phénomènes en mathématiques appliquées, comme la finance (calculs d'intérêts, annuités) ou la physique (méthode d'Euler pour approcher des fonctions). Les suites permettent également d'approcher des valeurs numériques comme $\sqrt{2}$ ou π, de façon plus ou moins rapide. C'est le cas de l'algorithme de Babylone (dérivé de la méthode de Newton) ou du problème de Bale, qui consiste à déterminer la limite de la suite $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} = 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \ldots + \frac{1}{n^2}$. Le génial mathématicien Euler en donnera la valeur en 1735 : $\dfrac{\pi^2}{6}$.

I Comportement global d'une suite

I.1 Suites monotones

Définition 1. *Soit (u_n) une suite de nombre réels. On dit que :*

- *la suite (u_n) est **croissante** lorsque, pour tout entier naturel n, $u_n \leqslant u_{n+1}$*
- *la suite (u_n) est **décroissante** lorsque, pour tout entier naturel n, $u_n \geqslant u_{n+1}$*
- *la suite (u_n) est **monotone** lorsqu'elle est croissante **ou** décroissante*

Selon la manière dont est définie une suite, on dispose de différentes techniques pour étudier sa monotonie (son sens de variations) :

- En étudiant le signe de la différence $u_{n+1} - u_n$
- En comparant le quotient $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ si la suite est à termes strictement positifs
- Par récurrence, si la suite est définie par récurrence

Exercice 1

Étudier la monotonie de la suite $(2^n - n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.

Exercice 2

Étudier la monotonie de la suite $\begin{cases} u_0 &= 1 \\ u_{n+1} &= \sqrt{u_n + 6} \end{cases}$.

I.2 Suites majorées, minorées, bornées

Définition 2. *Soit (u_n) une suite de nombre réels. On dit que :*

- *la suite (u_n) est **majorée** s'il existe un réel M tel que, pour tout entier naturel n, $u_n \leqslant M$*
- *la suite (u_n) est **minorée** s'il existe un réel m tel que, pour tout entier naturel n, $u_n \geqslant m$*
- *la suite (u_n) est **bornée** si elle est à la fois **minorée** et **majorée***

Remarque. Une suite croissante est minorée par son premier terme.
Une suite décroissante est majorée par son premier terme.

Exercice 3

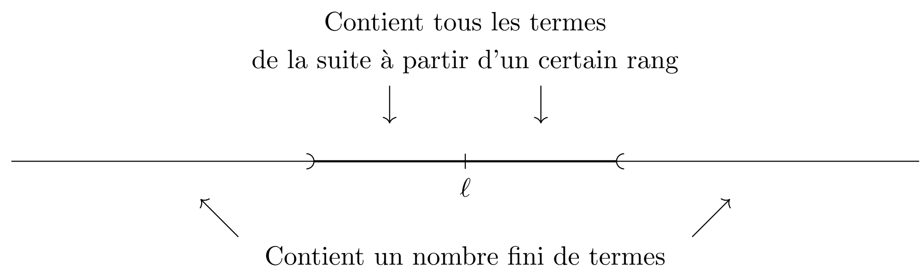
Démontrer que la suite $\left(3 - \dfrac{2}{n^2+}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée.

II Limite d'une suite

Lorsqu'on étudie une suite, on cherche à connaître sa monotonie, ses bornes éventuelles, mais aussi ce qui se passe lorsque l'indice n devient grand. Par exemple, si u_n désigne le nombre de moustiques dans une région au bout de n mois, il est intéressant de savoir si, à long terme, le nombre de moustiques va se stabiliser, si les moustiques vont disparaître ou si leur nombre va augmenter jusqu'à coloniser toute la région !

II.1 Suites convergentes

Définition 3. *Soit (u_n) une suite numérique et ℓ un nombre réel.*
*On dit que $(\mathbf{u_n})$ **admet pour limite** ℓ ou que $(\mathbf{u_n})$ **converge vers** ℓ si tout intervalle ouvert contenant ℓ contient **tous les termes de la suite à partir d'un certain rang**.*



Dans ce cas, on note $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \ell$, ou encore $u_n \longrightarrow \ell$.

Exemple. La suite définie par $u_n = \frac{1}{n}$ converge vers 0.
En effet, soient a et b tels que $a < 0 < b$. On a :

$$n \geqslant \frac{1}{b} \iff \frac{1}{n} \leqslant b \iff \frac{1}{n} \in]a\,;b[$$

Ainsi, tout intervalle ouvert $]a\,;b[$ contenant 0 contient tous les termes de la suite (u_n) à partir du rang $N \geqslant \frac{1}{b}$. La suite (u_n) converge bien vers 0 !

Remarque. Cette limite est intuitive : « plus n est grand, plus $\frac{1}{n}$ est proche de 0 ».

Propriété 4. *Soit (u_n) une suite convergente. La limite de (u_n) est* ***unique****.*

Propriété 5. *Soit (u_n) une suite* ***croissante*** *qui converge vers un réel ℓ. Alors, pour tout entier naturel n, on a :*

$$u_n \leqslant \ell$$

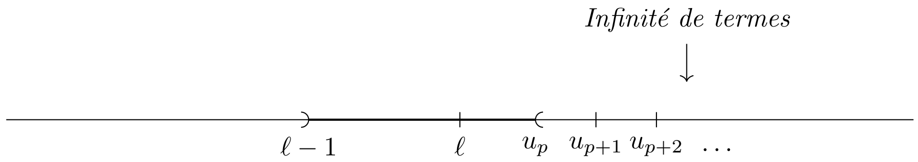
Démonstration. *Supposons qu'il existe un terme de la suite strictement plus grand que ℓ. Posons par exemple :*

$$u_p > \ell$$

Comme (u_n) est croissante, alors pour tout entier $n \geqslant p$, on a :

$$u_n \geqslant u_p > \ell$$

Cette dernière inégalité contredit le fait que la suite (u_n) converge vers ℓ : on peut trouver un intervalle ouvert contenant ℓ et ne contenant pas tous les termes de la suite à partir d'un certain rang. Par exemple, l'intervalle $]\ell - 1\,; u_p[$:



Ainsi, pour tout entier naturel n, on a forcément $u_n \leqslant \ell$. $\square$

Remarque. Si (u_n) est une suite **décroissante** et convergente vers ℓ, alors pour tout entier naturel n, on a $u_n \geqslant \ell$.

II.2 Suites divergentes

Définition 6. *Soit (u_n) une suite numérique.*
On dit que la suite (u_n) ***diverge*** *si elle ne converge pas (!).*

Derrière cette définition a priori sans difficultés se cachent 2 cas de figures :

- La suite (u_n) diverge vers $+\infty$ *(resp. $-\infty$)* : tout intervalle de la forme $]A\,;+\infty[$ *(resp. $]-\infty\,;A[$)* contient tous les termes de la suite à partir d'un certain rang.
- La suite (u_n) n'a pas de limite.

Exemple. La suite définie par $u_n = n^2$ diverge vers $+\infty$. C'est assez intuitif, car « plus n est grand, plus n^2 est grand ». Mais surtout, la définition est respectée.
Si A désigne un nombre réel positif, alors :

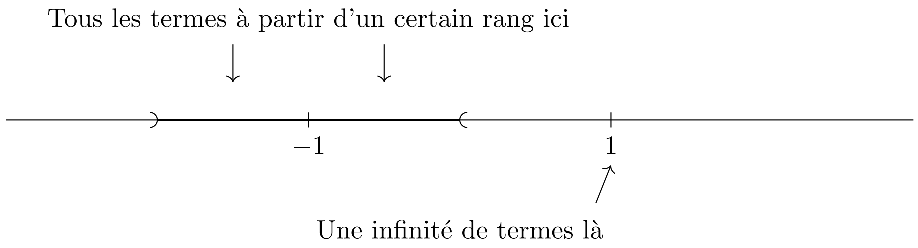
$$n > \sqrt{A} \iff n^2 > A \iff n^2 \in\,]A\,;+\infty[$$

Ainsi, dès que $n > \sqrt{A}$, l'intervalle $]A\,;+\infty[$ contient tous les termes de la suite !

Exemple. La suite définie par $u_n = (-1)^n$ diverge, car elle n'a pas de limite.

$$u_0 = 1 \qquad u_1 = -1 \qquad u_2 = 1 \qquad u_3 = -1 \qquad u_4 = 1 \qquad \dots$$

Tous les termes d'indices pairs sont égaux à 1, et tous les termes d'indices impairs sont égaux à -1. Il y a donc une infinité de 1 et de -1 dans les termes de la suite. Si la suite admettait une limite l, on pourrait trouver un intervalle contenant tous les termes de la suite à partir d'un certain rang. Cet intervalle devrait donc contenir 1 et -1. Mais cet intervalle pourrait être aussi petit que l'on veut... C'est impossible !



Propriété 7. *Toute suite croissante et non majorée diverge vers $+\infty$.*

Démonstration. *Si on suppose qu'une suite (u_n) croissante et non majorée converge vers un certain réel ℓ, alors elle serait majorée par ce réel ℓ d'après la propriété 5, ce qui est contraire au fait qu'elle ne soit pas majorée.* $\square$

II.3 Déterminer la limite d'une suite

Toutes les suites ne sont pas aussi « simples » que dans les exemples précédents, et les calculs pourraient vite devenir compliqués... On dispose cependant de règles permettant de calculer la limite d'un grand nombre de suites. Commençons par les suites usuelles :

Théorème 8. *Soit $p \in \mathbb{N}^*$.*

- *Les suites de termes généraux n^p et $\sqrt{n}$ divergent vers $+\infty$.*
- *Les suites de termes généraux $\frac{1}{n^p}$ convergent vers 0.*
- *Les suites de termes généraux $(-1)^n$, $\cos n$ et $\sin n$ divergent (pas de limite).*

Exercice 4

Déterminer les limites suivantes :

u_n	$\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$
n^4	
n^7	

u_n	$\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$
$\frac{1}{n^3}$	
$\frac{1}{\sqrt{n}}$	

Propriété 9.

- *Pour déterminer la limite d'une **somme** $u_n + v_n$, on effectue la somme des limites, avec les conventions suivantes :*

$$\lambda + (+\infty) = +\infty \qquad \lambda + (-\infty) = -\infty$$

$$(+\infty) + (+\infty) = +\infty \qquad (-\infty) + (-\infty) = -\infty$$

où λ désigne un réel.

- *Pour déterminer la limite d'un **produit** $u_n \times v_n$, on effectue le produit des limites, avec les conventions suivantes, et en utilisant au besoin la **règle des signes** :*

$$\lambda \times (\pm\infty) = \pm\infty \qquad (\pm\infty) \times (\pm\infty) = \pm\infty$$

*où λ désigne un réel **non nul**.*

Exercice 5

Déterminer les limites suivantes en utilisant les règles sur la somme et le produit de limites :

Limite à calculer	Opération	Résultat
$\lim\limits_{n\to+\infty} n^2 + 4$		
$\lim\limits_{n\to+\infty} n + \frac{1}{n}$		
$\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n^3} + \sqrt{n}$		
$\lim\limits_{n\to+\infty} -4n^3$		
$\lim\limits_{n\to+\infty} 3n^4 - \frac{1}{n^2}$		
$\lim\limits_{n\to+\infty} n \times (1 - n^2)$		

Propriété 10. *Il existe des cas particuliers pour lesquels on ne peut pas directement conclure quant à la limite de la somme ou du produit :*

$$(+\infty) + (-\infty) \qquad 0 \times (\pm\infty)$$

*On dit alors que l'on a une **Forme Indéterminée**, abrégé F.I.*

Exercice 6

Vérifier que les limites suivantes sont des formes indéterminées, puis calculer ces limites en levant l'indétermination :

Limite à calculer	Opération	Résultat
$\lim\limits_{n\to+\infty} n^3 - n$		
$\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n} \times n^2$		
$\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n^5} \times (1 - n^3)$		

Pour calculer la limite dans ces cas particuliers, on transforme l'expression pour **lever l'indétermination**.

- Dans le premier cas, **on met le terme de plus haut degré en facteur** :

$$n^3 - n = n^3 \times \left(\frac{n^3}{n^3} - \frac{n}{n^3}\right) = n^3 \times \left(1 - \frac{1}{n^2}\right)$$

Ainsi :

$$\left.\begin{array}{rcl} \lim\limits_{n\to+\infty} n^3 & = & +\infty \\ \lim\limits_{n\to+\infty} 1 - \dfrac{1}{n^2} & = & 1 \end{array}\right\} \Longrightarrow \lim_{n\to+\infty} n^3 \times \left(1 - \frac{1}{n^2}\right) = +\infty$$

Ainsi, $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} n^3 - n = +\infty}$.

- Dans le deuxième cas, on a une « fausse » forme indéterminée. En effet :

$$\frac{1}{n} \times n^2 = \frac{n^2}{n} = n \qquad \text{et} \qquad \lim_{n\to+\infty} n = +\infty$$

D'où :

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} \times n^2 = +\infty}$$

- Le dernier cas est identique. Il suffit de remarquer que :

$$\frac{1}{n^5} \times (1 - n^3) = \frac{1-n^3}{n^5} = \frac{1}{n^5} - \frac{1}{n^2} \qquad \text{et} \qquad \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n^5} - \frac{1}{n^2} = 0$$

D'où :

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n^5} \times (1 - n^3) = 0}$$

Ces deux derniers exemples justifient le terme de *forme indéterminée*, car la même opération « $0 \times \infty$ » donne deux résultats différents.

Propriété 11.

- *Pour déterminer la limite d'un* ***quotient*** $\dfrac{u_n}{v_n}$, *avec* $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n \neq 0$, *on effectue le quotient des limites, avec les conventions suivantes, en appliquant au besoin la règle des signes :*
  - *Pour tout réel* λ : $\dfrac{\lambda}{\pm\infty} = 0$
  - *Pour tout réel* $\lambda \neq 0$: $\dfrac{\pm\infty}{\lambda} = \pm\infty$
  - *Le cas* $\dfrac{\pm\infty}{\pm\infty}$ *est une* ***forme indéterminée***.

Exercice 7

Déterminer les limites suivantes en utilisant les règles sur le quotient :

Limite à calculer	Opération	Résultat
$\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{4}{n^2+n+1}$		
$\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{2-n^4}{\frac{1}{n}-3}$		
$\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{n-1}{2n+1}$		

Dans ce dernier cas, on lève l'indétermination en mettant en facteurs les termes de plus haut degré, comme précédemment :

$$\frac{n-1}{2n+1} = \frac{\cancel{n}\left(1 - \frac{1}{n}\right)}{\cancel{n}\left(2 + \frac{1}{n}\right)} = \frac{1 - \frac{1}{n}}{2 + \frac{1}{n}}$$

$$\left.\begin{array}{rcl} \lim\limits_{n\to+\infty} 1 - \dfrac{1}{n} & = & 1 \\ \lim\limits_{n\to+\infty} 2 + \dfrac{1}{n} & = & 2 \end{array}\right\} \Longrightarrow \lim_{n\to+\infty} \frac{1-\frac{1}{n}}{2+\frac{1}{n}} = \frac{1}{2} \Longrightarrow \boxed{\lim_{n\to+\infty} \frac{n-1}{2n+1} = \frac{1}{2}}$$

Exemple. $u_n = \frac{(-1)^n}{n}$

Ce dernier cas est particulier, car $(-1)^n$ n'admet pas de limite...
On peut néanmoins conjecturer le résultat à la calculatrice, et voir que la suite semble converger vers 0.
Heureusement, on peut démontrer ce résultat à l'aide de **théorèmes de comparaison** qui vont se révéler utiles dans bien des cas.

II.4 Théorèmes de comparaison

Théorème 12.

Hypothèse 1 *	***Hypothèse 2***	***Conclusion***
$u_n \geqslant v_n$	$\lim v_n = +\infty$	(u_n) *diverge vers* $+\infty$
$u_n \leqslant v_n$	$\lim v_n = -\infty$	(u_n) *diverge vers* $-\infty$
$v_n \leqslant u_n \leqslant w_n$	(v_n) *et* (w_n) *convergent vers la <u>même limite</u>* ℓ	(u_n) *converge vers* ℓ
$\lvert u_n - \ell \rvert \leqslant v_n$	$\lim v_n = 0$	(u_n) *converge vers* ℓ

** à partir d'un certain rang*

Démonstration. *Nous démontrerons seulement le premier résultat, les autres seront admis.*

L'hypothèse 1 nous assure l'existence d'un rang n_0 *à partir duquel tous les termes* u_n *sont supérieurs aux termes* v_n*.*

$$\text{Pour tout entier } n \geqslant n_0, \quad u_n \geqslant v_n$$

L'hypothèse 2 ($v_n \longrightarrow +\infty$) *se traduit par le fait que tout intervalle du type* $]A\,;+\infty[$ *contient tous les termes de la suite à partir d'un certain rang.*

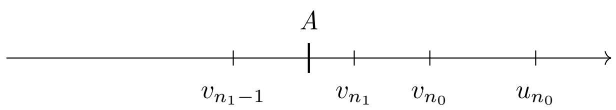
$$\text{Pour tout réel } A, \text{ il existe un entier naturel } n_1 \text{ tel que pour tout } n \geqslant n_1, \quad v_n > A$$

Montrons maintenant que $u_n \longrightarrow +\infty$*.*

Soit A *un nombre réel, et soient* n_0 *et* n_1 *les deux entiers définis précédemment.*

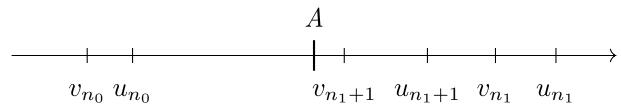
Faisons d'abord un dessin des deux hypothèses. Deux cas se présentent :

$\boxed{n_0 \geqslant n_1}$



$$n \geqslant n_0 \implies u_n \geqslant v_n > A$$

$\boxed{n_0 \leqslant n_1}$



$$n \geqslant n_1 \implies u_n \geqslant v_n > A$$

On voit sur le dessin que $u_n > A$ *dès que* $n \geqslant n_0$ *ou* $n \geqslant n_1$*. On pose donc* $n_2 = max(n_0, n_1)$ *:* n_2 *désigne le plus grand des deux entiers* n_0 *et* n_1*.*
Ainsi, étant donné un nombre réel A (choisi arbitrairement), on a montré qu'il existait un rang n_2 *à partir duquel* $u_n > A$*. Autrement dit, l'intervalle* $]A\,;+\infty[$ *contient tous les termes de la suite* (u_n) *dès que* $n \geqslant n_2$*. Par définition même, on a :*

$$\boxed{\lim_{n \to +\infty} u_n = +\infty}$$

□

Remarque. La troisième propriété est appelée **théorème des gendarmes** ou encore **théorème de l'étau**.

Remarque. La dernière propriété — qui est une conséquence directe du théorème de l'étau — est très pratique car il suffit de majorer $|u_n - l|$ par un terme qui tend vers 0. Mais encore faut-il connaître la valeur de l !

Exercice 8

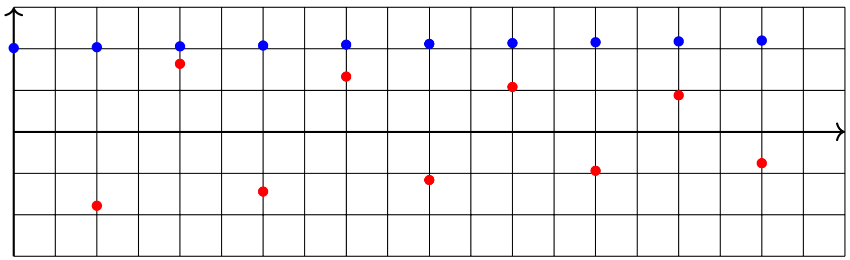
Démontrer que la suite $(\frac{(-1)^n}{n})_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers 0.

En plus des cas « classiques »vus précédemment, il existe un autre type de suite dont on peut calculer la limite : il s'agit des suites géométriques, et plus spécifiquement des suites dont le terme général est de la forme q^n.

Problème. *Quelle est la nature des suites de termes généraux* 1.01^n *et* $(-0.9)^n$ *?*

On peut essayer, à l'aide de la calculatrice, de conjecturer les limites éventuelles de ces suites :

n	1.01^n	$(-0.9)^n$
0	1	1
1	1.01	-0.9
2	1.0201	0.81
3	1.030301	-0.729
4	1.04060401	0.6561
5	1.0510100501	-0.59049
6	1.0615201506	0.531441
7	1.07213535211	-0.4782969
8	1.08285670563	0.43046721
9	1.09368527268	-0.387420489



Il semble que la suite de terme général $(-0.9)^n$ converge vers 0, alors que la suite de terme général 1.01^n semble croissante, mais on ne peut rien conclure quant à sa limite. Toujours avec la calculatrice, on a :

$$1.01^{10} \simeq 1.104 \qquad 1.01^{100} \simeq 2.704 \qquad 1.01^{1000} \simeq 20959.156$$

Il semblerait donc que la suite diverge vers $+\infty$...

Remarque. Le terme $1,01^n$ correspond à n hausses successives de 1%.

Théorème 13. *Soit $q \in \mathbb{R}$.*

- *Si $q > 1$, alors* $\lim\limits_{n \to +\infty} q^n = +\infty$
- *Si $q = 1$, alors* $\lim\limits_{n \to +\infty} q^n = 1$
- *Si $-1 < q < 1$, alors* $\lim\limits_{n \to +\infty} q^n = 0$
- *Si $q \leqslant -1$, alors la suite (q^n) n'a pas de limite*

Démonstration. *Contrairement aux théorèmes précédents, nous allons démontrer entièrement celui-ci. Nous avons cependant besoin d'un résultat préliminaire, appelé ¡¡ inégalité de Bernoulli ¿¿.*

Lemme. [1] *Pour tout réel $x > 0$, pour tout entier naturel n, on a :*

$$(1+x)^n \geqslant 1 + nx$$

Démonstration. *On démontre ce résultat par récurrence sur n. On spécifie ¡¡ sur n ¿¿ pour signaler que la variable x est seulement un paramètre ici, et sa valeur sera fixée dans toute la démonstration. On pose :*

$$\mathscr{P}(n) : \text{"}(1+x)^n \geqslant 1 + nx\text{"}$$

- ***Initialisation** : $(1+x)^0 = 1$ et $1 + 0 \times x = 1$. Manifestement, $1 \geqslant 1$ et donc la propriété est vraie pour $n = 0$.*

- ***Hérédité** : on suppose que $\mathscr{P}(n)$ est vraie pour un entier n fixé.*
  Montrons que $\mathscr{P}(n+1)$ est vraie, c'est à dire que $(1+x)^{n+1} \geqslant 1 + (n+1)x$.
  Multiplions l'inégalité de l'hypothèse de récurrence par $(1+x)$:

$$\begin{array}{rcl} (1+x)^n & \geqslant & 1 + nx \\ (1+x) \times (1+x)^n & \geqslant & (1+x) \times (1+nx) \\ (1+x)^{n+1} & \geqslant & 1 + nx + x + nx^2 \\ (1+x)^{n+1} & \geqslant & 1 + (n+1)x + nx^2 \end{array}$$

  Comme $nx^2 \geqslant 0$, on en déduit que $(1+x)^{n+1} \geqslant 1 + (n+1)x$, et la propriété est héréditaire.

- ***Conclusion** : par principe de récurrence, la propriété est donc vraie pour tout entier naturel n.*

□

Revenons à la démonstration initiale.

- *Si $q = 1$: il est clair que la suite (q^n) est constante égale à 1, et sa limite est donc 1.*

- *Si $q = 0$: il est clair que la suite (q^n) est constante égale à 0, et sa limite est donc 0.*

1. Un **lemme** est un résultat intermédiaire utilisé pour démontrer un théorème.

- *Si $q > 1$: on pose alors $x = q - 1$. Comme $q > 1$, alors $x > 0$ et l'inégalité de Bernoulli s'applique :*

$$(1+x)^n \geqslant 1 + nx$$

$$q^n \geqslant 1 + n(q-1)$$

Comme $q - 1 > 0$, on a donc $\lim\limits_{n\to+\infty} 1 + n(q-1) = +\infty$. D'après le théorème de comparaison, on en déduit que :

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} q^n = +\infty}$$

- *Si $-1 < q < 1$, $q \neq 0$:*

$$-1 < q < 0 \implies \frac{1}{q} < -1 \qquad 0 < q < 1 \implies \frac{1}{q} > 1$$

On a donc :

$$\left|\frac{1}{q}\right| > 1$$

Et d'après ce qui précède :

$$\lim_{n\to+\infty} \left|\frac{1}{q}\right|^n = +\infty$$

Or $\left|\frac{1}{q}\right|^n = \frac{1}{|q|^n} = \frac{1}{|q^n|}$, et d'après le théorème sur les opérations, si $\frac{1}{|q^n|} \longrightarrow +\infty$, alors $|q^n| \longrightarrow 0$, et donc :

$$\boxed{q^n \longrightarrow 0}$$

- *Si $q \leqslant -1$: la suite prend alternativement des valeurs positives et négatives, mais les valeurs ne se rapprochent pas de 0 : les termes d'indices pairs tendent vers $+\infty$, alors que les termes d'indices impairs tendent vers $-\infty$ (sauf pour $q = -1$, mais ce cas a déjà été traité plus haut). Cette suite n'a donc pas de limite, et est donc divergente.*

□

Exemple. Reprenons l'exemple précédent :

- $1,01^n$: comme $1,01 > 1$, alors on peut conclure que $\lim\limits_{n\to+\infty} 1,01^n = +\infty$
- $(-0,99)^n$: comme $-1 < -0,99 < 1$, alors on peut conclure que $\lim\limits_{n\to+\infty} (-0,99)^n = 0$

Exercice 9

Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} 3^n - 2^n$.

Exemple. On considère la somme des inverses des puissances de 2 :

$$S_n = \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \ldots + \frac{1}{2^n}$$

On va calculer la limite de cette suite. Commençons d'abord par transformer son expression : il s'agit d'une somme de termes consécutifs d'une suite géométrique de raison $q = \frac{1}{2}$. Il y a n termes, et le premier terme est $\frac{1}{2}$. On a donc :

$$S_n = \frac{1}{2} \times \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n}{1 - \frac{1}{2}}$$

Après simplification du dénominateur : $S_n = 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n$
On utilise le théorème précédent : $-1 < \frac{1}{2} < 1$ donc $\left(\frac{1}{2}\right)^n \longrightarrow 0$, et donc :

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} S_n = 1}$$

Remarque. Ce résultat peut traduire la situation suivante. Une puce se déplace d'un point A à un point B de façon particulierè : elle commence par sauter la moitié de la distance (et arrive donc au milieu du segment $[AB]$). Elle saute ensuite la moitié de la distance restante (c'est à dire $\frac{1}{4}$ de la distance) : elle a donc parcouru les $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$ de la distance totale. Elle recommence, et franchi donc une distance égale à $\frac{1}{8}$ de la distance AB. Elle a donc parcouru les $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} = \frac{7}{8}$ de cette distance.

La puce atteint-elle le point B de cette manière ?

La réponse est **non**. En effet, au bout de n saut, la puce a parcouru la distance $\frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \ldots + \frac{1}{2^n} = S_n$.
Or $S_n = 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n$, donc $S_n < 1$. La puce ne parcourt jamais la distance totale.
Mais (S_n) converge vers 1 : cela signifie, par définition, que la puce se rapproche aussi près qu'elle veut de B, moyennant un nombre suffisamment grand de sauts.

Au bout de combien de sauts la puce parcourt-elle plus de 99% de la distance totale ?

Utilisons un algorithme pour répondre à cette question. La suite S_n étant trivialement croissante (la puce avance continuellement), il suffit de calculer les termes successifs de S_n et de s'arrêter dès que $S_n \geqslant 0,99$.

```python
S = 1/2
n = 1

while S < 0.99:
  S = S + 1 / (2**n)
  n = n + 1

print(n)
```

Le résultat est $n = 7$. La valeur de S est alors de 0,9921875.

On peut également chercher au bout de combien de saut la puce a parcouru 99,99% de la distance AB en modifiant le 0,99 de l'algorithme par 0,9999.

Le résultat est alors $n = 14$ et $S \simeq 0,999939$.

II.5 Théorème de convergence monotone

Terminons ce chapitre par quelques résultats sur les suites monotones.

Théorème 14.

- *Toute suite* ***croissante*** *et* ***non majorée*** *diverge vers* $+\infty$.
- *Toute suite* ***décroissante*** *et* ***non minorée*** *diverge vers* $-\infty$.

Démonstration. *Soit (u_n) une suite croissante non majorée, et soit A un nombre réel quelconque.*

Puisque (u_n) n'est pas majorée, il existe un rang n_0 tel que $u_{n_0} > A$.

Mais (u_n) est croissante, donc pour tout entier $n \geqslant n_0$, on a $u_n \geqslant u_{n_0}$ donc $u_n > A$.

Ainsi, l'intervalle $]A\,;+\infty[$ contient tous les termes de la suite (u_n) à partir du rang n_0. Par définition, on a donc :

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty}$$

Le deuxième cas se démontre de manière analogue. □

Théorème 15 (Convergence monotone)**.**

- *Toute suite* ***croissante*** *et* ***majorée*** *est convergente.*
- *Toute suite* ***décroissante*** *et* ***minorée*** *est convergente.*

Démonstration. *Admis. La démonstration fait appel à des notions hors programme de Terminale et découle de la définition même des nombres réels.* □

Remarque. Ce théorème assure la convergence de la suite, mais ne dit rien de sa limite !

Exercice 10

On considère la suite (u_n) définie par récurrence par :

$$\begin{cases} u_0 &= 0,8 \\ u_{n+1} &= u_n^2 + 0,1 \end{cases}$$

1. Montrer par récurrence que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad 0 \leqslant u_{n+1} \leqslant u_n$$

2. Que peut-on en déduire pour la suite (u_n) ?

Exemple. On considère la suite dont le terme général est le nombre obtenu en juxtaposant successivement les entiers $1, 2, \ldots, n$ après la virgule.

$u_1 = 0,1 \qquad u_2 = 0,12 \qquad u_3 = 0,123 \qquad \ldots \qquad u_{10} = 0,123\,456\,789\,10 \qquad \ldots$

Cette suite est **croissante** (on rajoute des chiffres après le dernier chiffre situé après la virgule), et **majorée** par... 1 !
D'après le théorème de convergence monotone, c'est donc une suite convergente ! Quelle est sa limite ?

C'est le nombre $0,123\,456\,789\,101\,112\,131\ldots$, appelé **nombre de Champernowne** en l'honneur du mathématicien britanique du même nom qui l'a découvert en 1933.

David Gawen Champernowne (1912 - 2000), ce génie