

Exercices de Cours : Suites

1 Comportement global d'une suite

1.1 Suites monotones

Exercice 01 Étudier la monotonie de la suite $(2^n - n)_{n \in \mathbb{N}}$.

Exercice 02 Étudier la monotonie de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par :

$$\begin{cases} u_0 &= 1 \\ u_{n+1} &= \sqrt{u_n + 6} \end{cases}$$

1.2 Suites majorées, minorées, bornées

Exercice 03 Démontrer que la suite $\left(3 - \frac{2}{n^2 + 1}\right)_{n \in \mathbb{N}}$ est bornée.

2 Limite d'une suite

2.1 Suites convergentes

2.2 Suites divergentes

2.3 Déterminer la limite d'une suite

Exercice 04 Déterminer les limites suivantes :

u_n	$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$
n^4	
n^7	

u_n	$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$
$\frac{1}{n^3}$	
$\frac{1}{\sqrt{n}}$	

Exercice 05 Déterminer les limites suivantes en utilisant les règles sur la somme et le produit de limites :

Limite à calculer	Opération	Résultat
$\lim_{n \rightarrow +\infty} n^2 + 4$		
$\lim_{n \rightarrow +\infty} n + \frac{1}{n}$		
$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n^3} + \sqrt{n}$		
$\lim_{n \rightarrow +\infty} -4n^3$		
$\lim_{n \rightarrow +\infty} 3n^4 - \frac{1}{n^2}$		
$\lim_{n \rightarrow +\infty} n \times (1 - n^2)$		

Somme de limites : ($\lambda \in \mathbb{R}$)

$$\lambda + (+\infty) = +\infty \quad \lambda + (-\infty) = -\infty \quad (+\infty) + (+\infty) = +\infty \quad (-\infty) + (-\infty) = -\infty$$

Produit de limites : ($\lambda \in \mathbb{R}^*$)

$$\lambda \times (\pm\infty) = \pm\infty \quad (\pm\infty) \times (\pm\infty) = \pm\infty$$

Exercice 06 Vérifier que les limites suivantes sont des formes indéterminées, puis calculer ces limites en levant l'indétermination :

Limite à calculer	Opération	Résultat
$\lim_{n \rightarrow +\infty} n^3 - n$		
$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \times n^2$		
$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n^5} \times (1 - n^3)$		

Formes indéterminées : $(+\infty) + (-\infty) = \mathbf{F.I.}$ $0 \times (\pm\infty) = \mathbf{F.I.}$

Exercice 07 Déterminer les limites suivantes en utilisant les règles sur le quotient :

Limite à calculer	Opération	Résultat
$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{4}{n^2 + n + 1}$		
$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2 - n^4}{\frac{1}{n} - 3}$		
$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n - 1}{2n + 1}$		

Quotient de limites : $\forall \lambda \in \mathbb{R}, \frac{\lambda}{\pm\infty} = 0$ $\forall \lambda \in \mathbb{R}^*, \frac{\pm\infty}{\lambda} = \pm\infty$ $\frac{\pm\infty}{\pm\infty} = \mathbf{F.I.}$

2.4 Théorèmes de comparaison

Exercice 08 Démontrer que la suite $\left(\frac{(-1)^n}{n}\right)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge vers 0.

2.5 Limite de q^n

Exercice 09 Calculer $\lim_{n \rightarrow +\infty} 3^n - 2^n$.

3 Théorème de convergence monotone

Exercice 10 On considère la suite (u_n) définie par récurrence par :

$$\begin{cases} u_0 &= 0,8 \\ u_{n+1} &= u_n^2 + 0,1 \end{cases}$$

1. Montrer par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N}, 0 \leq u_{n+1} \leq u_n$

2. Que peut-on en déduire pour la suite (u_n) ?