Exercices : Suites

Exercice 01 Étudier la monotonie des suites ci-dessous :

1. $u_n = n^2(3-n)$
2. $u_n = n - 3^n$
3. $u_n = 0,1^n \times n^2$
4. $u_n = \dfrac{n}{n+1}$
5. $u_n = \dfrac{n^2-1}{n^2+1}$
6. $u_n = \dfrac{1}{\sqrt{1}} + \dfrac{1}{\sqrt{2}} + \ldots + \dfrac{1}{\sqrt{n}}$
7. $\left\{\begin{array}{rcl} u_0 & = & 0 \\ u_{n+1} & = & u_n + n^2 \end{array}\right.$
8. $\left\{\begin{array}{rcl} u_0 & = & 5 \\ u_{n+1} & = & \sqrt{u_n+2} \end{array}\right.$

Exercice 02 Montrer que chacune des suites ci-dessous est majorée, et déterminer un majorant :

$$u_n = 1 - \frac{1}{n} \qquad v_n = \frac{3n}{n+1} \qquad w_n = 1 + \frac{2}{7} + \ldots + \left(\frac{2}{7}\right)^n$$

Exercice 03 Calculer les limites des suites suivantes :

1. $u_n = 3n^2 - 1 + \frac{1}{n}$
2. $u_n = (1-3n)(n^2 + n - 2)$
3. $u_n = \dfrac{1}{n^2+n+1}$
4. $u_n = 3n^2 - n + 5$
5. $u_n = 8n - n^3$
6. $u_n = \dfrac{n+2}{n+2}$
7. $u_n = \dfrac{3n^2+n}{n^2-1}$
8. $u_n = \dfrac{n^3-2n}{n^2+1}$

Exercice 04 Étudier la monotonie et la limite de la suite $(\sqrt{n+1} - \sqrt{n})_{n\in\mathbb{N}}$.

Exercice 05 À l'aide des théorèmes de comparaison, déterminer la limite de la suite (u_n) dans chacun des cas suivants :

1. $u_n = 2n + (-1)^n$
2. $u_n = \dfrac{(-1)^n}{n}$
3. $u_n = \dfrac{3+(-1)^n}{\sqrt{n}}$

Exercice 06 Étudier la limite de la suite (u_n) dans chacun des cas suivants :

1. $u_n = 1,01^n$
2. $u_n = 5 - 0,99^n$
3. $u_n = 1 + \dfrac{1}{7} + \dfrac{1}{7^2} + \ldots + \dfrac{1}{7^n}$
4. $u_n = \dfrac{4}{3-2^n}$
5. $u_n = \dfrac{3^n+4^n}{4^n}$
6. $u_n = 0,37\,37\ldots 37$ (n fois 37)

Exercice 07 Soit (u_n) la suite définie par : $\left\{\begin{array}{rcl} u_0 & = & 2904 \\ u_{n+1} & = & \sqrt{u_n} \end{array}\right.$

1. Démontrer que :
$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad 1 \leqslant u_{n+1} \leqslant u_n$$
2. Justifier que (u_n) converge vers un réel $\ell \geqslant 1$.
3. On admet que ℓ vérifie l'égalité $\ell = \sqrt{\ell}$. Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.

Exercice 08 Soit (u_n) la suite définie par : $\left\{\begin{array}{rcl} u_0 & = & 1 \\ u_{n+1} & = & \sqrt{1+u_n} \end{array}\right.$

1. Démontrer que :
$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant 2$$
2. Justifier que (u_n) converge vers un réel $\ell \leqslant 2$.
3. On admet que ℓ vérifie l'égalité $\ell = \sqrt{1+\ell}$. Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.

Exercice 09 Soit (u_n) la suite définie par : $\left\{\begin{array}{rcl} u_0 & = & 2 \\ u_{n+1} & = & u_n^2 - 1 \end{array}\right.$

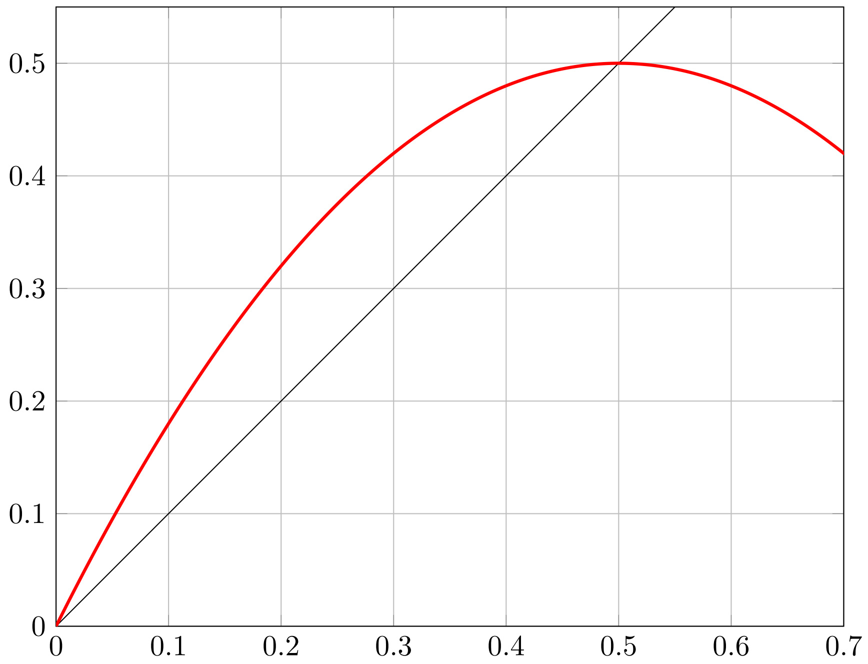
On admet le résultat suivant : si (u_n) converge, alors sa limite ℓ est solution de l'équation $\ell = \ell^2 - 1$.

1. Quelles sont les valeurs possibles pour ℓ ?
2. Montrer que (u_n) diverge vers $+\infty$.

Exercice 10 On considère la suite (u_n) définie par :

$$\begin{cases} u_0 & = & 0{,}2 \\ u_{n+1} & = & 2u_n(1-u_n) \end{cases}$$

1. Sur le graphique suivant, on a représenté la fonction $f : x \mapsto 2x(1-x)$ ainsi que la droite d'équation $y = x$ sur l'intervalle $[0\,;0,7]$.

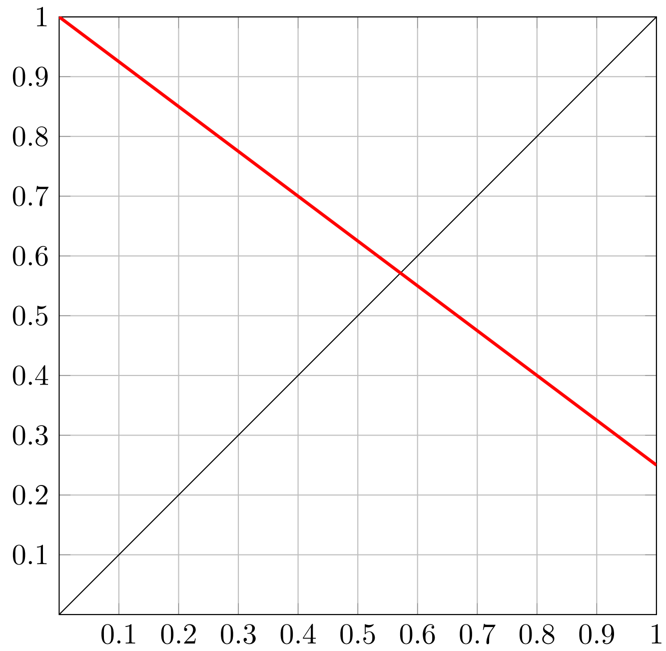


   Représenter les quatre premiers termes de la suite.
2. Conjecturer le sens de variations et la limite de (u_n).
3. Déterminer les variations de f sur $[0; 1]$.
4. Démontrer par récurrence que pour tout entier n, $0 < u_n \leqslant \frac{1}{2}$.
5. Démontrer que (u_n) est croissante.
6. Que peut-on en déduire pour (u_n) ?
7. On admet que la limite ℓ de (u_n) vérifie l'équation $\ell = f(\ell)$.
   Déterminer la valeur de ℓ.

Exercice 11 On considère la suite (u_n) définie par :

$$\begin{cases} u_0 & = & \alpha \in \mathbb{R} \\ u_{n+1} & = & 1 - \frac{3}{4}u_n \end{cases}$$

Sur le graphique suivant, on a représenté la fonction $f : x \mapsto 1 - \frac{3}{4}x$ ainsi que la droite d'équation $y = x$ sur l'intervalle $[0\,;1]$.



1. Dans cette question, on choisit $\alpha = 0,3$.
   (a) Représenter graphiquement les cinq premiers termes de la suite (u_n).
   (b) La suite (u_n) semble-t-elle monotone ?
   (c) La suite (u_n) semble-t-elle convergente ? Si oui, quelle serait sa limite ?
2. On revient au cas général. Pour tout entier naturel n, on pose $v_n = u_n - \dfrac{4}{7}$.
   (a) Montrer que la suite (v_n) est géométrique. Donner sa raison et son premier terme en fonction de α.
   (b) Donner l'expression de v_n en fonction de n et de α, puis celle de u_n.
   (c) En déduire que quelque soit $\alpha \in \mathbb{R}$, (u_n) converge vers un réel à préciser.