Exercices supplémentaires : Suites

Exercice 01 ***Un peu de récurrence...***

Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = \sqrt{2 + u_n}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
Montrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 < u_n < u_{n+1} < 2$.
Que peut-on en déduire pour la suite (u_n) ?

Exercice 02 ***Limite de suite récurrente***

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = \frac{1}{3}u_n + n - 2$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

1. Calculer u_1, u_2, u_3
2. Démontrer que pour tout $n \geqslant 5$, $u_n \geqslant n - 3$.
3. En déduire la limite de (u_n).

Exercice 03 ***Suite arithmético-géométrique***

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 800$ et $u_{n+1} = \dfrac{3}{4}u_n + 330$ pour $n \in \mathbb{N}$.

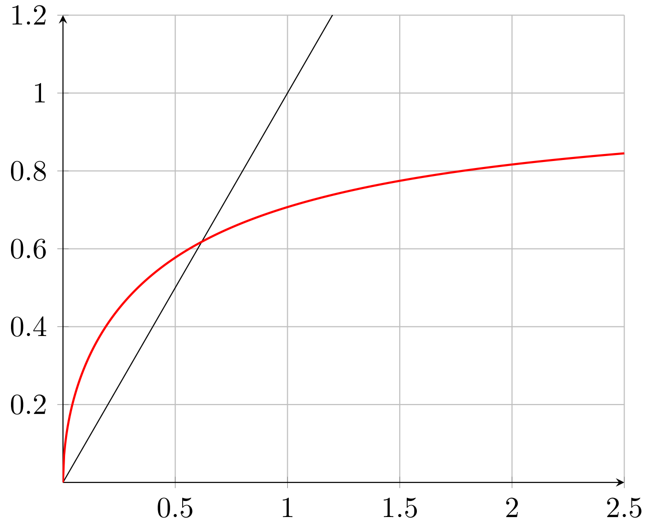
1. Résoudre l'équation $x = \dfrac{3}{4}x + 330$. On note α la solution.
2. On pose $v_n = u_n - \alpha$, où α est le réel trouvé dans la question précédente. Montrer que (v_n) est géométrique, et préciser sa raison et son premier terme.
3. Exprimer v_n en fonction de n. En déduire de u_n en fonction de n.
4. Déterminer la limite de (u_n).

Exercice 04 ***Escaliers***

1. Soit f la fonction définie sur $[0; +\infty[$ par $f(x) = \sqrt{\dfrac{x}{1+x}}$
   (a) Démontrer que f est croissante sur $[0; +\infty[$.
   (b) Résoudre dans $[0; +\infty[$ l'équation $f(x) = x$.
2. Dans cette question, on considère la suite (u_n) définie par :

$$\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_{n+1} = \sqrt{\dfrac{u_n}{1+u_n}} \end{cases}$$

   (a) Réprésenter graphiquement les premiers termes de la suite (u_n) sur le graphique ci-dessous, sur lequel sont représentées les courbes d'équations $y = f(x)$ et $y = x$ sur $[0; +\infty[$.



   (b) Conjecturer graphiquement la monotonie et la convergence de (u_n).
   (c) Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n :

$$0 \leqslant u_{n+1} \leqslant u_n$$

   (d) En déduire que (u_n) converge.
   (e) On note ℓ la limite de (u_n), et on admet que ℓ vérifie l'égalité $\ell = f(\ell)$. Déterminer la valeur de ℓ.

Exercice 05 ***Un peu d'initiative !***

La suite de nombres $\sqrt{2}$, $\sqrt{2\sqrt{2}}$, $\sqrt{2\sqrt{2\sqrt{2}}}$ ...converge-t-elle ?

Exercice 06 ***Comme au bac (d'après Polynésie juin 2013)***

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = \dfrac{1}{2}$ et pour tout entier naturel n :

$$u_{n+1} = \frac{3u_n}{1+2u_n}$$

1. (a) Calculer u_1 et u_2 sous forme de fractions irréductibles.
   (b) Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n, $u_n > 0$.
2. On admet que pour tout entier naturel n, on a également $u_n < 1$.
   Démontrer que (u_n) est croissante.
3. Soit (v_n) la suite définie pour tout entier naturel n par $v_n = \dfrac{u_n}{1-u_n}$.
   (a) Montrer que (v_n) est géométrique de raison 3.
   (b) Exprimer, pour tout entier naturel n, v_n en fonction de n.
   (c) En déduire que pour tout entier naturel n, $u_n = \dfrac{3^n}{3^n+1}$.
   (d) Déterminer la limite de (u_n).

Exercice 07 ***Suites imbriquées***

On considère les deux suites (u_n) et (v_n) définies par $u_0 = 1$, $v_0 = 0$ et pour tout entier naturel n :

$$u_{n+1} = -2v_n \qquad v_{n+1} = u_n + 3v_n$$

1. Calculer u_1, v_1, u_2 et v_2.
2. Démontrer que la suite $(u_n + v_n)$ est constante.
   Déterminer le réel a tel que pour tout entier n, $u_n + v_n = a$.
3. Pour tout entier naturel n, on pose $w_n = 1 + v_n$.

   Démontrer que (w_n) est géométrique.
   En déduire l'expression de w_n en fonction de n.
4. Déduire des questions précédentes les expressions de v_n et u_n.
5. Calculer les limites de (u_n) et (v_n).

Exercice 08 ★ ***Somme des inverses***

On considère la suite $(H_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ de terme général $H_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$.

1. Démontrer que pour tout entier naturel n non nul, on a $H_{2n} - H_n \geqslant \frac{1}{2}$
2. En déduire que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} H_n = +\infty$

Exercice 09 ★ ***Somme des carrés des inverses***

On considère la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}$.

1. Démontrer que : $\forall\, k \geqslant 2$, $\frac{1}{k^2} \leqslant \frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}$
2. En sommant les inégalités, déduire que (S_n) converge.

Exercice 10 ★ ***Limite mystérieuse***

On considère les suites (u_n) et (v_n) définies par :

$$\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_{n+1} = \dfrac{5u_n + 3v_n}{8} \end{cases} \qquad \begin{cases} v_0 = 10 \\ v_{n+1} = \dfrac{u_n + v_n}{2} \end{cases}$$

ainsi que la suite (w_n) définie par $w_n = v_n - u_n$.

1. (a) Montrer que (w_n) est géométrique.
   (b) Justifier que (w_n) est strictement positive.
2. Exprimer $u_{n+1} - u_n$ en fonction de w_n, et en déduire que (u_n) est croissante.
3. Montrer de même que (v_n) est décroissante.
4. (a) Démontrer, en utilisant la question 1.b), que pour tout entier n, $u_n < v_n$.
   (b) En déduire que (u_n) est majorée, puis qu'elle converge.
   On note ℓ_1 sa limite.
   (c) Montrer de même que (v_n) converge. On note ℓ_2 sa limite.
5. Calculer la limite de (w_n). En déduire que $\ell_1 = \ell_2$.
6. On note ℓ la limite commune des suites (u_n) et (v_n).
   (a) En « passant à la limite » dans les expressions de u_{n+1} et v_{n+1}, peut-on obtenir une valeur possible pour ℓ ?
   (b) On considère la fonction Python suivante :

```python
def limite(seuil):
    u = 2
    v = 10

    while v-u >= seuil:
        u, v = (5*u + 3*v)/8, (u+v)/2

    return u
```

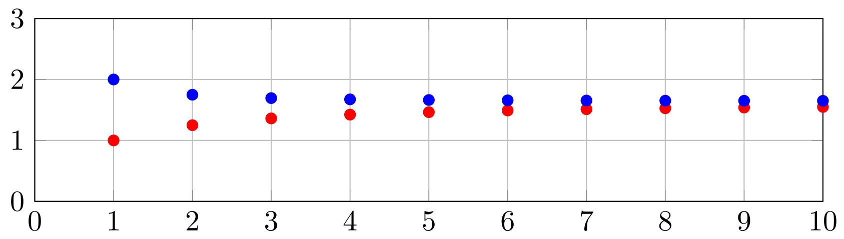
On exécute l'instruction `limite(0.01)` : elle retourne `5.427734375`. Interpréter ce résultat dans le contexte de l'exercice.

Exercice 11 ★ ***Suites adjacentes***

Deux suites (u_n) et (v_n) sont dites **adjacentes** si elles vérifient les propriétés suivantes :

- l'une des suites est croissante
- l'autre est décroissante
- $\lim\limits_{n \to +\infty} (v_n - u_n) = 0$

1. Pour tout entier naturel n non nul, on pose $u_n = 1 + \dfrac{1}{n}$ et $v_n = 1 - \dfrac{1}{n}$.
   (a) Montrer que (u_n) et (v_n) sont adjacentes.
   (b) Déterminer la limite de chacune des suites.
2. Pour tout entier naturel n non nul, on pose $u_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}$ et $v_n = u_n + \dfrac{1}{n}$.
   (a) Montrer que (u_n) et (v_n) sont adjacentes.
   (b) Sur le graphique ci-dessous, on a représenté les premiers termes des suites (u_n) et (v_n).



Émettre une conjecture sur la convergence des suites (u_n) et (v_n).

3. Dans cette question, on se propose de démontrer le théorème suivant :

Soient (u_n) et (v_n) deux suites adjacentes.
*Alors (u_n) et (v_n) **convergent** et ont la **même limite**.*

Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites adjacentes, avec (u_n) croissante et (v_n) décroissante.

   (a) Pour tout entier n, on pose $w_n = v_n - u_n$. Montrer que (w_n) est décroissante et minorée par 0.
   (b) En déduire que pour tout entier naturel n, $u_n \leqslant v_n$.
   (c) Démontrer que (u_n) est majorée, puis que (u_n) converge vers un réel ℓ_1.
   (d) Démontrer de même que (v_n) converge vers un réel ℓ_2.
   (e) En déduire que (u_n) et (v_n) convergent vers une limite commune ℓ telle que, pour tout entier naturel n, $u_n \leqslant \ell \leqslant v_n$.
   (f) Montrer que dans le cas où les suites sont strictement monotones, on a : $u_n < \ell < v_n$

Exercice 12 ★★ ***Irrationnalité de e***

Pour tout entier naturel n non nul, on pose $u_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}$ et $v_n = u_n + \dfrac{1}{n.n!}$.

1. Montrer que (u_n) et (v_n) sont adjacentes.
2. On appelle e la limite commune de (u_n) et (v_n) (surtout celle de (u_n) en fait).
   On peut démontrer, mais ce n'est pas au programme de Terminale, que cette limite est bien le nombre d'Euler e, la base de l'exponetielle. Démontrer que pour tout entier naturel $n \geqslant 2$:
   $$n!u_n < n!e < n!u_n + \frac{1}{n}$$
   Puis que :
   $$0 < n!e - n!u_n < 1$$
3. Justifier que pour tout entier naturel n, le nombre $n!u_n$ est un entier.
4. Supposons que e soit rationnel, c'est à dire qu'il existe deux entiers naturels non nuls p et q tels que $e = \dfrac{p}{q}$, avec $q \geqslant 2$ (q ne peut pas être égal à 1, on sait que e n'est pas un entier).

   Montrer alors que $q!p - q!u_p$ est un nombre entier strictement compris entre 0 et 1... Conclusion ?