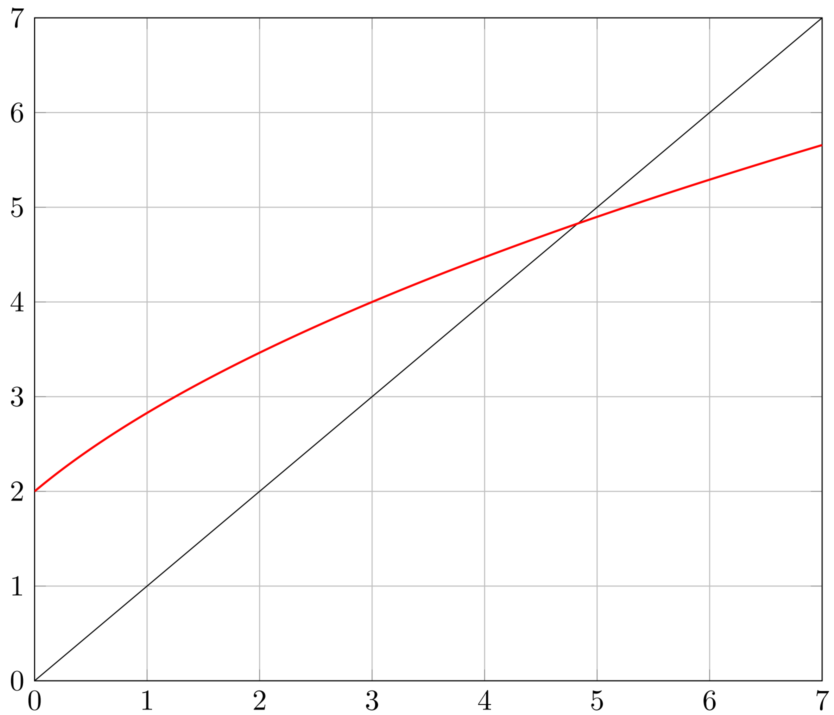
Travail en Groupe : Suites

***Sujet A** : Exercices classiques*

Exercice 1. Déterminer, en justifiant soigneusement la réponse, la limite des suites suivantes :

1. $u_n = \left(1 - \dfrac{1}{n}\right)\left(2 + \dfrac{3}{\sqrt{n}}\right)$
2. $u_n = n^3 - n^2 + 2n - 3$
3. $u_n = \dfrac{2n+3}{n^2+1}$
4. $u_n = 1 + \dfrac{(-1)^n}{n^2}$
5. $u_n = \dfrac{2}{5} + \dfrac{2}{5^2} + \dfrac{2}{5^3} + \ldots + \dfrac{2}{5^n}$

Exercice 2. On considère la suite (u_n) définie par : $\begin{cases} u_0 & = & 1 \\ u_{n+1} & = & f(u_n) \end{cases}$ où f est la fonction définie sur $[-1; +\infty[$ par $f(x) = 2\sqrt{x+1}$. Ci-dessous, on a représenté les courbes d'équations $y = x$ et $y = f(x)$.



1. Représenter graphiquement u_0, u_1, u_2 et u_3.

   Conjecturer le sens de variations et la convergence de (u_n).
2. Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n, $0 \leqslant u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant 5$.
3. Que peut-on en déduire pour la suite (u_n) ?
4. On admet que la limite ℓ de la suite (u_n) vérifie l'équation $\ell = f(\ell)$.

   Déterminer la limite de la suite (u_n).

Travail en Groupe : Suites

***Sujet B** : Suites et Algorithmes*

On considère la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n par : $\begin{cases} u_0 &= 4 \\ u_{n+1} &= 3 - \dfrac{10}{u_n + 4} \end{cases}$

Partie A

1. Calculer u_1 et u_2 sous forme de fractions.
2. Conjecturer le sens de variation et la limite de (u_n).
3. Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n, $u_n \geqslant 1$.
4. Démontrer que pour tout entier naturel n, $u_{n+1} - u_n = \dfrac{(1-u_n)(u_n+2)}{u_n+4}$.

   En déduire le sens de variation de la suite (u_n).
5. La suite (u_n) est-elle convergente ? Justifier.

Partie B

On considère la suite (v_n) définie pour tout entier naturel n par $v_n = \dfrac{u_n - 1}{u_n + 2}$.

1. Démontrer que (v_n) est une suite géométrique de raison $q = \dfrac{2}{5}$, et préciser son premier terme.
2. Exprimer v_n en fonction de n.

   On admet que pour tout entier naturel n, $v_n \neq 1$.
3. Démontrer que pour tout entier naturel n, $u_n = \dfrac{2v_n + 1}{1 - v_n}$.
4. En déduire la limite de la suite (u_n).

Partie C

On considère les fonctions Python incomplètes ci-dessous :

```
1  def suite_u():
2      u = 4
3      n = 0
4  
5      while .... :
6          u = 3 - 10 / (u+4)
7          n = n + 1
8  
9      return ...
```

```
1  def suite_v():
2      v = 0.5
3      n = 0
4  
5      while .... :
6          v = 2/5 * v
7          n = n + 1
8  
9      return ...
```

1. La fonction `suite_u` doit retourner la valeur de u_5.

   Recopier et compléter les lignes 5 et 9 en conséquence.
2. La fonction `suite_v` doit retourner la valeur du plus petit entier naturel n tel que $v_n \leqslant 10^{-6}$.

   Recopier et compléter les lignes 5 et 9 en conséquence.

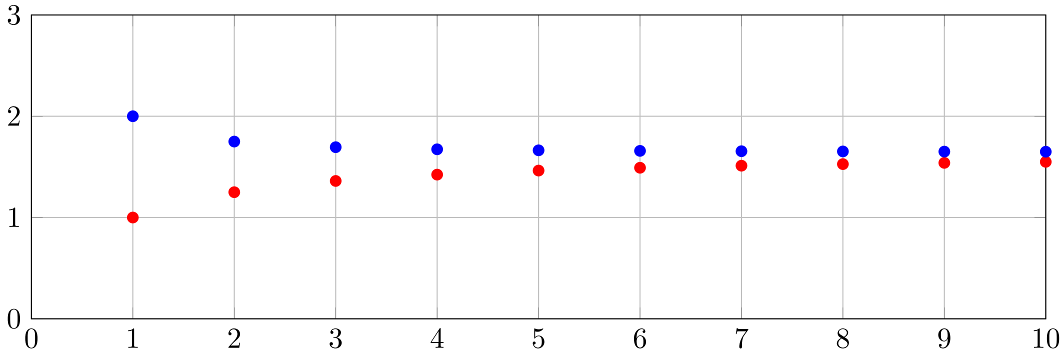
Travail en Groupe : Suites

***Sujet C** : Suites adjacentes*

Deux suites (u_n) et (v_n) sont dites **adjacentes** si elles vérifient les propriétés suivantes :

- l'une des suites est croissante
- l'autre est décroissante
- $\lim\limits_{n \to +\infty} (v_n - u_n) = 0$

1. Pour tout entier naturel n non nul, on pose $u_n = 1 + \dfrac{1}{n}$ et $v_n = 1 - \dfrac{1}{n}$.
   (a) Montrer que (u_n) et (v_n) sont adjacentes.
   (b) Déterminer la limite de chacune des suites.
2. Pour tout entier naturel n non nul, on pose $u_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}$ et $v_n = u_n + \dfrac{1}{n}$.
   (a) Montrer que (u_n) et (v_n) sont adjacentes.
   (b) Sur le graphique ci-dessous, on a représenté les premiers termes des suites (u_n) et (v_n).



   Émettre une conjecture sur la convergence des suites (u_n) et (v_n).
3. Dans cette question, on se propose de démontrer le théorème suivant :

Soient (u_n) et (v_n) deux suites adjacentes.
*Alors (u_n) et (v_n) **convergent** et ont la **même limite**.*

Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites adjacentes, avec (u_n) croissante et (v_n) décroissante.

   (a) Pour tout entier n, on pose $w_n = v_n - u_n$. Montrer que (w_n) est décroissante et minorée par 0.
   (b) En déduire que pour tout entier naturel n, $u_n \leqslant v_n$.
   (c) Démontrer que (u_n) est majorée, puis que (u_n) converge vers un réel ℓ_1.
   (d) Démontrer de même que (v_n) converge vers un réel ℓ_2.
   (e) En déduire que (u_n) et (v_n) convergent vers une limite commune ℓ telle que, pour tout entier naturel n, $u_n \leqslant \ell \leqslant v_n$.
   (f) Montrer que dans le cas où les suites sont strictement monotones, on a : $u_n < \ell < v_n$

Bonus Stage : irrationnalité de e

4. Pour tout entier naturel n non nul, on pose $u_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}$ et $v_n = u_n + \frac{1}{n.n!}$.

   (a) Montrer que (u_n) et (v_n) sont adjacentes.

   (b) On appelle e la limite commune de (u_n) et (v_n) (surtout celle de (u_n) en fait).
   On peut démontrer, mais ce n'est pas au programme de Terminale, que cette limite est bien le nombre d'Euler e, la base de l'exponetielle. Démontrer que pour tout entier naturel $n \geqslant 2$:

   $$n!u_n < n!e < n!u_n + \frac{1}{n}$$

   Puis que :

   $$0 < n!e - n!u_n < 1$$

   (c) Justifier que pour tout entier naturel n, le nombre $n!u_n$ est un entier.

   (d) Supposons que e soit rationnel, c'est à dire qu'il existe deux entiers naturels non nuls p et q tels que $e = \frac{p}{q}$, avec $q \geqslant 2$ (q ne peut pas être égal à 1, on sait que e n'est pas un entier).
   Montrer alors que $q!p - q!u_p$ est un nombre entier strictement compris entre 0 et 1... Conclusion ?