Chapitre 7 : Convexité

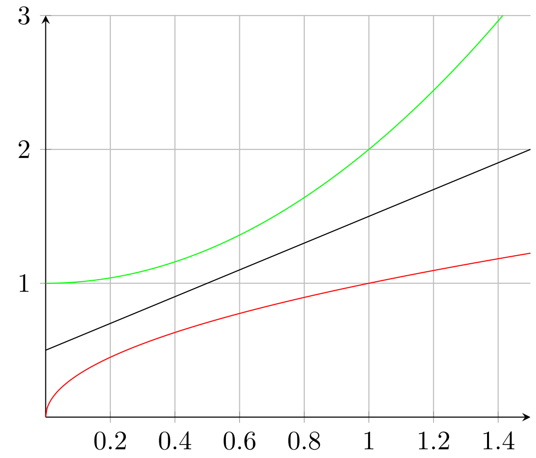
Table des matières

Notions au programme

- Fonction convexe sur un intervalle : définition par la position relative de la courbe représentative et des sécantes.
- Pour une fonction deux fois dérivable, équivalence admise avec la position par rapport aux tangentes, la croissance de f', la positivité de f''.
- Point d'inflexion.

Introduction

On considères les trois fonctions suivantes :



Décrire les variations de ces trois fonctions.

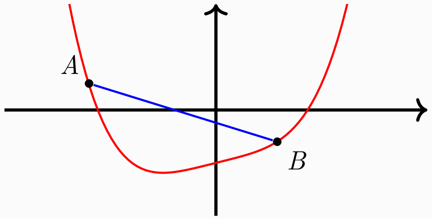
Quelles sont les différences entre ces trois fonctions ?

I Convexité

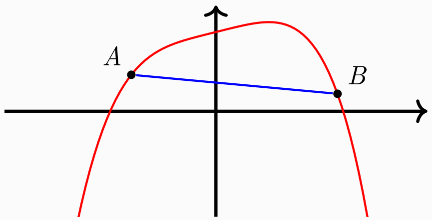
I.1 Définition géométrique

Définition 1. *Soit f une fonction définie sur un intervalle I.*

*Si pour tous points distincts A et B de $\mathscr{C}_f$, le segment $[AB]$ est situé « **au-dessus** » de $\mathscr{C}_f$, on dit que f est **convexe** sur I.*



*Si pour tous points distincts A et B de $\mathscr{C}_f$, le segment $[AB]$ est situé « **en-dessous** » de $\mathscr{C}_f$, on dit que f est **concave** sur I.*



Exemple. La fonction carrée est convexe sur $\mathbb{R}$.

Exemple. La fonction inverse est concave sur $\mathbb{R}_-^*$, convexe sur $\mathbb{R}_+^*$.

I.2 Caractérisation analytique

Propriété 2. *Soit f une fonction deux fois dérivable sur un intervalle I.*

1) Les propositions suivantes sont équivalentes :

- *f est **convexe** sur I*
- *f' est **croissante** sur I*
- *f'' est **positive** sur I*
- *$\mathscr{C}_f$ est située **au-dessus de ses tangentes***

2) Les propositions suivantes sont équivalentes :

- *f est **concave** sur I*
- *f' est **décroissante** sur I*
- *f'' est **négative** sur I*
- *$\mathscr{C}_f$ est située **en-dessous de ses tangentes***

☞ *Pour montrer qu'une fonction est convexe (resp. concave), il suffit donc de montrer que f'' est positive (resp. négative), ce qui est en général le plus facile.*

Exemple. Soit $f(x) = x^2$.
Pour tout réel x, $f'(x) = 2x$ et $f''(x) = 2 > 0$: la fonction carrée est donc bien une fonction convexe !

Montrons que $\mathscr{C}_f$ est bien au-dessus de ses tangentes.
La tangente à $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse a admet pour équation :

$$y = f'(a)(x-a) + f(a) \quad \Longrightarrow \quad y = 2a(x-a) + a^2 \quad \Longrightarrow \quad y = 2ax - a^2$$

Pour étudier la position relative de $\mathscr{C}_f$ avec cette tangente, on étudie le signe de la différence $f(x) - y$:

$$d_a(x) = f(x) - y = x^2 - (2ax - a^2) = x^2 - 2ax + a^2$$

En remarquant que $x^2 - 2ax + a^2 = (x-a)^2$, on en déduit que, quelques soient les réels x et a considérés, $d_a(x) \geqslant 0$.
Ainsi, quelque soit la tangente choisie, la courbe est toujours au-dessus de la tangente.

Ce dernier résultat se démontre aisément pour toute fonction f.

Démonstration. *Démontrons que si f'' est positive, alors $\mathscr{C}_f$ est au-dessus de ses tangentes.*
Soit f une fonction deux fois dérivable sur I telle que, pour tout x de I, $f''(x) \geqslant 0$.
Soit $a \in I$. La tangente à $\mathscr{C}_f$ au point a admet pour équation :

$$T_a : y = f'(a)(x-a) + f(a)$$

Pour montrer que $\mathscr{C}_f$ est au-dessus de T_a, on étudie comme précédemment le signe de la différence :

$$\begin{aligned} d_a(x) = f(x) - y &= f(x) - (f'(a)(x-a) + f(a)) \\ &= f(x) - f'(a)(x-a) - f(a) \\ &= f(x) - f'(a)x + af'(a) - f(a) \end{aligned}$$

Pour montrer que d_a est positive, on va étudier ses variations sur I.
La fonction d_a est dérivable sur I, et on a, pour tout réel x de I :

$$d_a'(x) = f'(x) - f'(a)$$

On sait par hypothèse que $f'' \geqslant 0$, donc que f' est croissante. Ainsi :

- *Si $x \leqslant a$, alors $f'(x) \leqslant f'(a)$ et $d_a'(x) \leqslant 0$*
- *Si $x \geqslant a$, alors $f'(x) \geqslant f'(a)$ et $d_a'(x) \geqslant 0$*

On obtient ainsi le tableau de variations de d_a sur I :

x		a	
Signe de $d'_a(x)$	$-$	0	$+$
Variations de d_a	↘	0	↗

De plus, on a $d_a(a) = f(a) - f'(a).a + a.f'(a) - f(a) = 0$, *et on déduit du tableau de variations que :*

$$\forall x \in I, \quad d_a(x) \geqslant 0$$

Ainsi, $\mathscr{C}_f$ *est bien au-dessus de sa tangente en* a.

Le raisonnement précédent étant vrai quelque soit le réel a *choisi (et donc la tangente considérée), on a bien montré que si* $f' \geqslant 0$ *sur* I, *alors* $\mathscr{C}_f$ *est au-dessus de ses tangentes sur* I. □

Exercice 1

Étudier les variations et la convexité de $f(x) = x^5 - x$.

I.3 Point d'inflexion

Définition 3. *Soit* f *une fonction définie et dérivable sur un intervalle* I *et* $\mathscr{C}_f$ *sa courbe représentative.*
S'il existe un point A *de* $\mathscr{C}_f$ *tel que la courbe traverse sa tangente en ce point, alors on dit que* A *est un* ***point d'inflexion***.

Exercice 2

Montrer que $(0;0)$ est un point d'inflexion de la courbe d'équation $y = x^3$.

Remarque. Au niveau d'un point d'inflexion, la courbe change de convexité.

Propriété 4. *Si* f'' *s'annule* ***en changeant de signe*** *en* a, *alors* $\mathscr{C}_f$ *admet un point d'inflexion d'abscisse* a.

Exercice 3

Variations, convexité, points d'inflexions et schéma de $f(x) = x^5 - 5x^4$.