Exercices : Convexité

Exercice 01 Soit f une fonction définie sur $[-5\,;3]$. On sait que :

- f est croissante sur $[-5\,;0]$
- f est convexe sur $[-5\,;-2]$
- f est décroissante sur $[0\,;3]$
- f est concave sur $[-2\,;3]$

Représenter graphiquement une fonction f compatible avec ces informations.

Exercice 02 Pour tout réel x, on pose $f(x) = 3x^3 + 3x^2 - 4x + 1$.

1. Pour tout réel x, déterminer $f''(x)$.
2. En déduire les intervalles sur lesquels f est convexe.
3. La fonction f possède-t-elle un point d'inflexion ? Si oui, préciser ses coordonnées.

Exercice 03 Étudier la convexité de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = x^4 + 2x^2 - 3x + 1$$

Exercice 04 On considère la fonction f définie pour tout réel x de l'intervalle $[2\,;8]$ par $f(x) = \dfrac{-x^2+10x-16}{x^2}$.
On note $\mathscr{C}_f$ la courbe représentative de f dans un repère orthonormé.

1. (a) Montrer que pour tout réel x de l'intervalle $[2\,;8]$, $f'(x) = \dfrac{-10x+32}{x^3}$
   (b) Étudier le signe de $f'(x)$ sur $[2\,;8]$.
   (c) En déduire les variations de f sur $[2\,;8]$.
2. (a) Montrer que pour tout réel x de l'intervalle $[2\,;8]$, $f''(x) = \dfrac{20x-96}{x^4}$.
   (b) Étudier la convexité de f sur $[2\,;8]$.
   (c) Montrer que $\mathscr{C}_f$ admet un point d'inflexion sur $[2\,;8]$.

Exercice 05 Dans chaque cas, étudier les variations et la convexité de la fonction f sur l'intervalle donné, en précisant les éventuels points d'inflexion, puis représenter l'allure de la fonction dans un repère orthonormé.

1. $f : x \longmapsto x^3 - 3x + 1 \quad I = [-3\,;3]$
2. $f : x \longmapsto x^4 - 3x^2 \quad I = [-2\,;2]$
3. $f : x \longmapsto xe^x \quad I = [-5\,;1]$
4. $f : x \longmapsto \dfrac{1}{1+x^4} \quad I = [-3\,;3]$

Exercice 06 Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}_+$ par $f(x) = \sqrt{x}$.

1. Étudier la convexité de f sur $\mathbb{R}_+^*$.
2. Déterminer l'équation de la tangente à $\mathscr{C}_f$ en 1.
3. En déduire que :
$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad \sqrt{x} \leqslant \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$$

Exercice 07 On considère la fonction $f : x \longmapsto \dfrac{1}{1+e^{-x}}$.

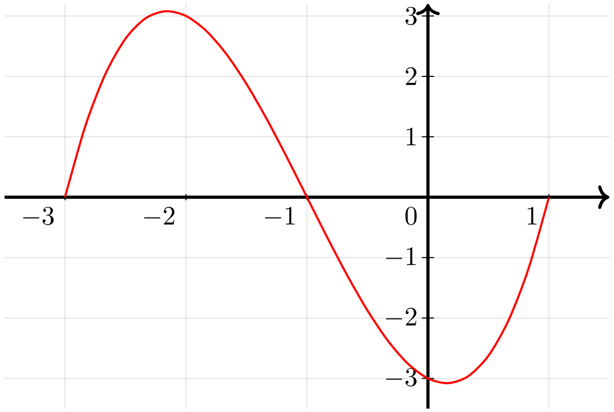
1. Préciser l'ensemble de définition de f.
2. Étudier la convexité de f sur $\mathscr{D}_f$.
3. Déterminer l'équation de Δ, tangente à $\mathscr{C}_f$ en 0.
4. Préciser la position relative de $\mathscr{C}_f$ et de Δ. (utiliser la convexité !)

Exercice 08 Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = xe^{2x-1}$.

1. Déterminer le tableau de variations de f sur $\mathbb{R}$.
2. Étudier la convexité de f sur $\mathbb{R}$.
3. Déterminer la position relative de $\mathscr{C}_f$ et de la droite Δ d'équation $y = x$.

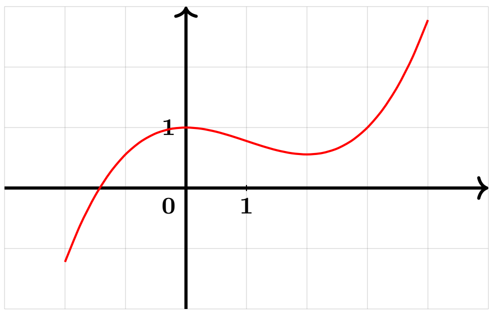
Exercice 09 Pour chacune des affirmations suivantes, dire si elle est vraie ou fausse en justifiant la réponse.

1. Soit f une fonction deux fois dérivable sur l'intervalle $[-3\ ;\ 1]$. On donne ci-dessous la représentation graphique de sa **fonction dérivée seconde** f''.



Affirmation 1 : la fonction f est convexe sur $[-1\ ;\ 1]$

2. Dans un repère, on a tracé ci-contre la courbe représentative d'une fonction f définie et deux fois dérivable sur $[-2\ ;\ 4]$

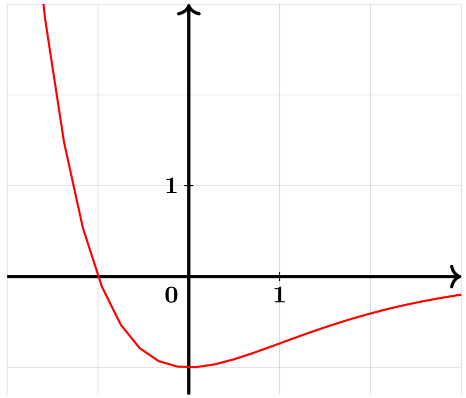


Affirmation 2 : la fonction f' est croissante sur $[2; 4]$.

3. Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = x^{1000} + x$.

Affirmation 3 : la fonction g possède exactement un point d'inflexion.

Exercice 10 On a représenté ci-dessous la **fonction dérivée** f' d'une fonction f dérivable sur $\mathbb{R}$.



1. Conjecturer le sens de variations et la convexité de f sur $\mathbb{R}$.
2. On admet que pour tout réel x, $f(x) = (x + 2)e^{-x}$.

   Démontrer les conjectures précédentes.