Travail en Groupe : Convexité

Sujet A *: Au plus haut*

Dans cet exercice, on considère la fonction f définie sur $[0\,;+\infty[$ par :

$$f(x) = x\mathrm{e}^{-x}$$

On note $\mathscr{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère orthogonal du plan.
On admet que f est deux fois dérivable sur $[0\,;+\infty[$.

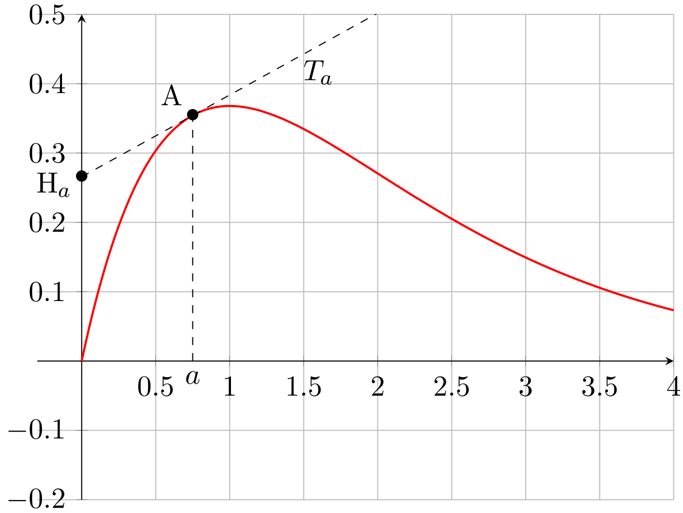
1. Montrer que f admet un maximum sur $[0\,;+\infty[$ dont on précisera la valeur exacte.
2. Montrer que pour tout réel $x \in [0\,;+\infty[$:

$$f''(x) = (x-2)e^{-x}$$

3. Étudier la convexité de f sur $[0\,;+\infty[$.
4. Soit $a \in [0\,;+\infty[$.

   On note :

   - A le point de $\mathscr{C}_f$ d'abscisse a
   - T_a la tangente en A
   - H_a le point d'intersection de T_a avec l'axe des ordonnées
   - $g(a)$ l'ordonnée de H_a



   (a) Démontrer que l'équation réduite de T_a est :

$$y = (1-a)\mathrm{e}^{-a}x + a^2e^{-a}$$

   (b) En déduire l'expression de $g(a)$.

   (c) Démontrer que $g(a)$ est maximum lorsque A est un point d'inflexion de $\mathscr{C}_f$.

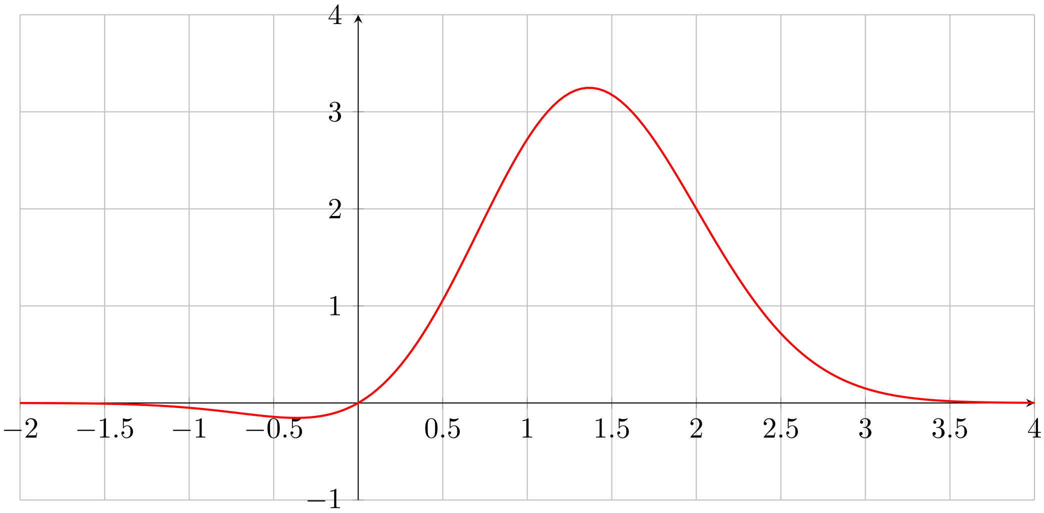
Travail en Groupe : Convexité

Sujet B *: Convexité et affirmations*

Dans cet exercice, on considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = x\mathrm{e}^{-x^2+2x}$$

Ci-dessous, on a représenté $\mathscr{C}_f$, la courbe représentative de f, dans le plan muni d'un repère orthogonal.



1. Conjecturer graphiquement :

   (a) les variations de f sur $\mathbb{R}$

   (b) la convexité de f sur $\mathbb{R}$

2. Déterminer le plus grand intervalle sur lequel f est croissante.

3. On admet que f est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$.

   (a) Démontrer que pour tout réel x :

   $$f''(x) = (x-2)(4x^2-2)\mathrm{e}^{-x^2+2x}$$

   (b) Étudier la convexité de f sur $\mathbb{R}$.

   (c) Justifier que $\mathscr{C}_f$ admet trois points d'inflexion A, B et C (avec $x_A < x_B < x_C$).

   Préciser leurs coordonnées exactes.

4. Répondre par Vrai ou Faux à l'affirmation suivante, en justifiant la réponse :

   « Les tangentes à $\mathscr{C}_f$ en B et C sont sécantes en un point D d'ordonnée égale à 4 »