Chapitre 8 : Limites de fonctions

Table des matières

Notions au programme

-

Nous savons calculer la limite d'une suite : c'est le nombre ℓ dont s'approchent indéfiniment les termes de la suite, au fur et à mesure que l'indice n devient grand. On parle donc de « limite quand n tend vers $+\infty$ ».

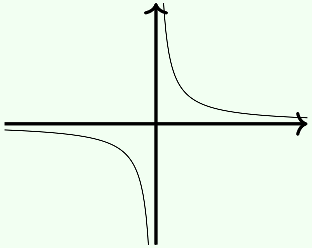
Dans ce chapitre, nous nous intéressons aux limites de **fonctions**. Contrairement à une suite (u_n) dont l'indice n est un entier naturel, une fonction $f : x \longrightarrow f(x)$ est définie, en général, sur $\mathbb{R}$ ou du moins sur une partie de $\mathbb{R}$. On peut alors définir la limite d'une fonction quand x tend vers $+\infty$, mais aussi lorsque x tend vers $-\infty$, et même lorsque x tend vers un réel a.

I Introduction

Étudier les limites d'une fonction f, c'est regarder l'évolution de $f(x)$ aux bornes de son ensemble de définition.

Exercice 1

Soit f la fonction définie sur $]-\infty\,;0[\cup]0\,;+\infty[$ par $f(x)=\dfrac{1}{x}$.
À l'aide d'un tableau de valeurs et de la courbe représentative, conjecturer le comportement de $\dfrac{1}{x}$ aux bornes de son ensemble de définition.



x	10	100	1 000	10 000
$\frac{1}{x}$	0,1	0,01	0,001	0,000 1

Conjecture : …

x	-10	-100	-1 000	-10 000
$\frac{1}{x}$	-0,1	-0,01	-0,001	-0,000 1

Conjecture : …

x	0,1	0,01	0,001	0,000 1
$\frac{1}{x}$	10	100	1 000	10 000

Conjecture : …

x	-0,1	-0,01	-0,001	-0,000 1
$\frac{1}{x}$	-10	-100	-1 000	-10 000

Conjecture : …

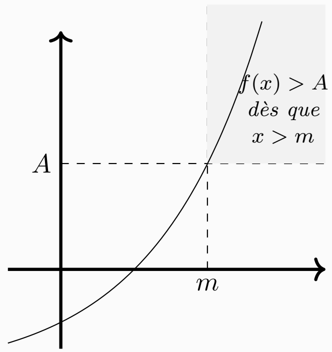
II Limite d'une fonction en $+\infty$ et $-\infty$

Dans cette partie, on considère une fonction f définie sur $]-\infty\,;a[\cup]b\,;+\infty[$.

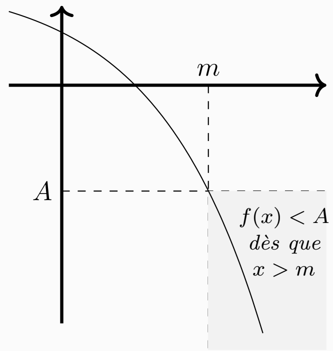
II.1 Limite infinie

Définition 1. *On dit que :*

- *$f(x)$ tend vers $+\infty$ lorsque x tend vers $+\infty$ quand tout intervalle du type $[A\,;+\infty[$ contient toutes les valeurs de $f(x)$ pour x assez grand.*
- *$f(x)$ tend vers $-\infty$ lorsque x tend vers $+\infty$ quand tout intervalle du type $]-\infty\,;A]$ contient toutes les valeurs de $f(x)$ pour x assez grand.*

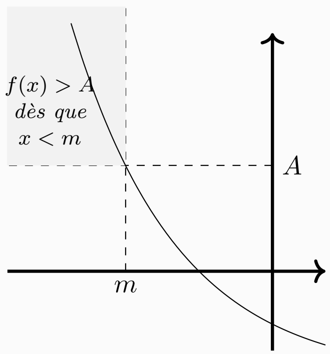


$$\boxed{\lim_{x\to+\infty} f(x)=+\infty}$$

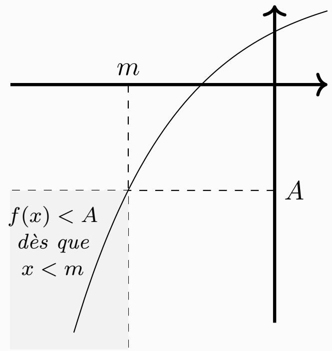


$$\boxed{\lim_{x\to+\infty} f(x)=-\infty}$$

On définit de manière analogue les limites quand $x\longrightarrow-\infty$:



$$\boxed{\lim_{x\to-\infty} f(x)=+\infty}$$



$$\boxed{\lim_{x\to-\infty} f(x)=-\infty}$$

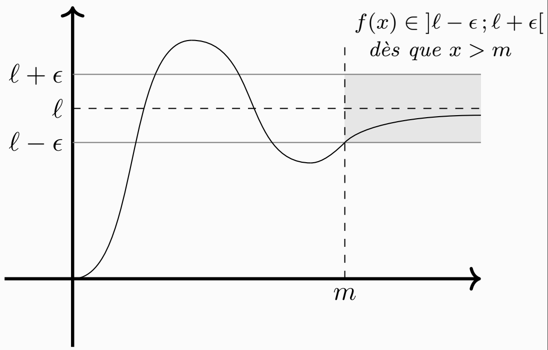
Remarque. Pour une fonction, x peut tendre vers $-\infty$, ce qui n'avait pas de sens pour une suite.

II.2 Limite finie

Définition 2.

Soit $\ell \in \mathbb{R}$.
On dit que $f(x)$ tend vers ℓ lorsque x tend vers $+\infty$ quand tout intervalle ouvert contenant ℓ contient tous les nombres $f(x)$ pour x assez grand.
On note alors :

$$\boxed{\lim_{x \to +\infty} f(x) = \ell}$$



On définit de même la limite finie quand $x \longrightarrow -\infty$.

Définition 3. *Lorsque $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \ell$ (ou $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \ell$), on dit que la droite d'équation $y = \ell$ est* ***asymptote horizontale*** *à la courbe de f en $+\infty$ (ou $-\infty$).*

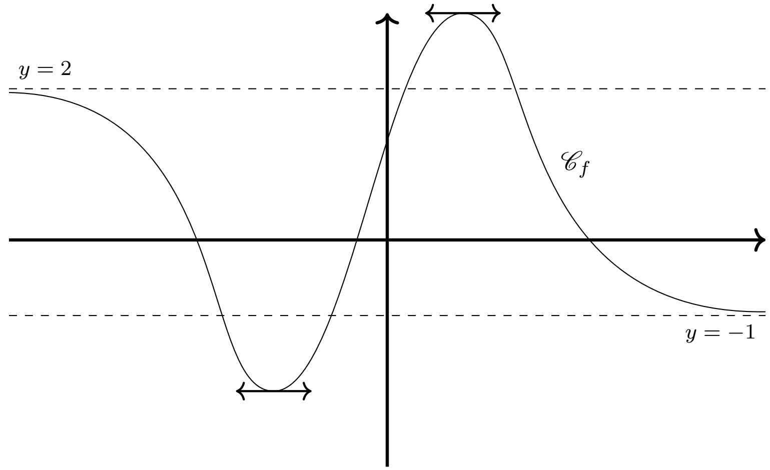
Exercice 2

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ dont le tableau de variations est le suivant :

x	$-\infty$		-3		2		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	2	$\searrow$	-2	$\nearrow$	3	$\searrow$	-1

On peut lire dans ce tableau que :

- $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 2 \quad \Longrightarrow$ asymptote horizontale d'équation $y = 2$ en $-\infty$
- $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -1 \quad \Longrightarrow$ asymptote horizontale d'équation $y = -1$ en $+\infty$



II.3 Limites des fonctions usuelles en $+\infty$ et $-\infty$

Théorème 4. *Soit $n \in \mathbb{N}^*$.*

$$\lim_{x \to +\infty} x^n = +\infty \qquad \lim_{x \to +\infty} \sqrt{x} = +\infty$$

$$\lim_{x \to -\infty} x^n = \begin{cases} +\infty & n \text{ pair} \\ -\infty & n \text{ impair} \end{cases}$$

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x^n} = 0^+ \qquad \lim_{x \to -\infty} \frac{1}{x^n} = \begin{cases} 0^+ & n \text{ pair} \\ 0^- & n \text{ impair} \end{cases}$$

$$\lim_{x \to +\infty} e^x = +\infty \qquad \lim_{x \to -\infty} e^x = 0^+$$

Démonstration. *On montrera plus loin dans ce cours les limites de la fonction exponentielle.* □

Remarque. En pratique, il n'est pas nécessaire de distinguer le « signe » du zéro dans la limite, sauf si cette limite intervient dans le calcul d'une limite plus complexe.

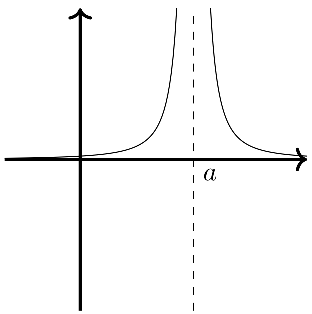
III Limite d'une fonction en $a \in \mathbb{R}$

Dans cette partie, on considère un réel a et une fonction f définie sur un intervalle contenant a ou sur un intervalle du type $]\ldots ; a[$ ou $]a ; \ldots[$.

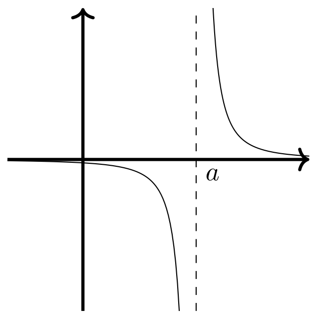
III.1 Limite infinie

Définition 5. *On dit que f a pour limite $+\infty$ (*resp. $-\infty$*) quand x tend vers a si $f(x)$ est aussi grand (*resp. *aussi petit) que l'on veut à condition de prendre x suffisamment proche de a.*

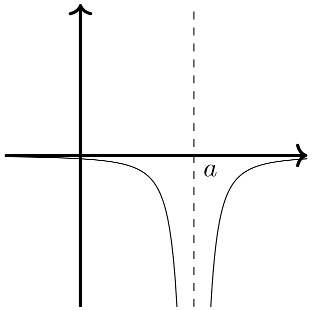
Plusieurs cas sont possibles :



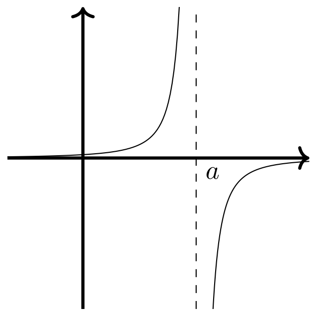
$$\lim_{x\to a} f(x) = +\infty$$



$$\begin{cases} \lim\limits_{x\to a^+} f(x) = +\infty \\ \lim\limits_{x\to a^-} f(x) = -\infty \end{cases}$$

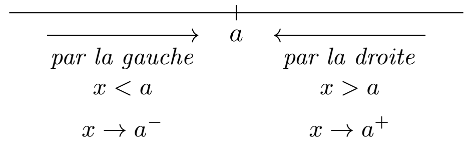


$$\lim_{x\to a} f(x) = -\infty$$



$$\begin{cases} \lim\limits_{x\to a^+} f(x) = -\infty \\ \lim\limits_{x\to a^-} f(x) = +\infty \end{cases}$$

Remarque. Il y a deux manières de tendre vers a : par la gauche ou par la droite.



Dans le cas où les limites à gauche et à droite sont identiques, on pourra parler de la limite en a de la fonction f, sans distinction de a^+ et a^-, et écrire $\lim\limits_{x\to a} f(x)$.

Définition 6. *Lorsque f a pour limite $+\infty$ ou $-\infty$ lorsque x tend vers a (éventuellement à gauche ou à droite), on dit que la droite d'équation $x = a$ est* ***asymptote verticale*** *à la courbe de f en a.*

Exercice 3

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R} \setminus \{2\}$ le tableau de variations est le suivant :

x	$-\infty$		-3		2		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	‖	$-$	
$f(x)$	$+\infty$	↘	-1	↗	$+\infty$ ‖ $+\infty$	↘	1

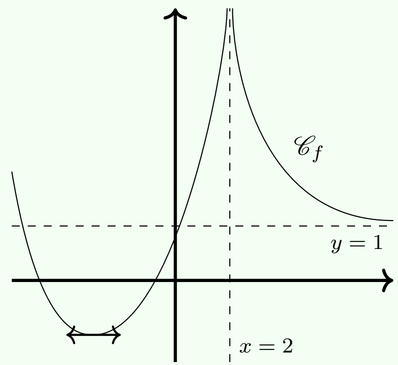
On peut lire dans ce tableau que :

$$\lim_{x\to 2} f(x) = +\infty$$

$$\lim_{x\to +\infty} f(x) = 1$$

Graphiquement, $\mathscr{C}_f$ admet donc :

- une asymptote verticale : la droite d'équation $x = 2$
- une asymptote horizontale : la droite d'équation $y = 1$



III.2 Limite finie

Définition 7. *On dit que f a pour limite ℓ quand x tend vers a si et seulement si tout intervalle ouvert contenant ℓ contient aussi toutes les valeurs de $f(x)$ pour tout x suffisamment proche de a.*

Ce cas particulier sera étudié en détail dans le chapitre sur la *Continuité*.

Exemple. Soit $f(x) = \dfrac{\sin x}{x}$.
Bien que non définie en 0, cette fonction semble admettre une limite finie en 0, comme on peut le voir dans le tableau de valeurs suivant :

x	-0.2	-0,1	-0,01	0	0,01	0,1	0.2
$f(x) \approx$	0,99335	0,9983	0,9999	?	0,9999	0,9983	0,99335

III.3 Limites de fonctions usuelles

Théorème 8.
$$\lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x} = +\infty \qquad \lim_{x\to 0^-} \frac{1}{x} = -\infty$$

Théorème 9. *Soit f est une fonction polynôme, ou une des fonctions $x \mapsto \sqrt{x}$, $x \mapsto \cos x$, $x \mapsto \sin x$, ou encore la somme, le produit, le quotient ou la valeur absolue de telles fonctions. Si f **est définie en** a, alors :*

$$\boxed{\lim_{x\to a} f(x) = f(a)}$$

Exemple. Soit f la fonction définie par $f(x) = x^2 - x + 2$.
La fonction f est un polynôme, elle est donc définie sur $\mathbb{R}$. On peut ainsi calculer sa limite en tout point. Par exemple :

$$\lim_{x\to 0} f(x) = f(0) = 2 \qquad \lim_{x\to -3} f(x) = f(-3) = 14$$

Théorème 10. *Si f n'est pas définie en a, et que pour tout $x \neq a$, $f(x) = g(x)$ où g est une fonction définie en a et vérifiant les hypothèses du théorème précédent, alors f admet une limite en a et :*

$$\boxed{\lim_{x\to a} f(x) = g(a)}$$

Exercice 4

Soit f la fonction définie par $f(x) = \dfrac{x^2 + 7x - 30}{x - 3}$.
Déterminer $\lim\limits_{x\to 3} f(x)$.

IV Calculer la limite d'une fonction

IV.1 Opérations sur les limites

Toutes les opérations sur les limites vues avec les suites restent vraies.

On dispose en plus de la nouvelle propriété suivante :

Propriété 11. *Pour déterminer la limite d'un **quotient** $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ dans le cas où $g(x) \longrightarrow 0^+$ ou $g(x) \longrightarrow 0^-$, on applique la règle suivante, en utilisant la **règle des signes** :*

$$\frac{\lambda}{0} = \infty \qquad \frac{\infty}{0} = \infty$$

*où λ désigne un réel **non nul**.*

Dans le cas où l'on obtient $\dfrac{0}{0}$, on ne peut pas conclure directement (c'est une forme indéterminée).

Remarque. Comme pour les suites, on retrouve les 3 principales formes indéterminées, ainsi qu'une nouvelle :

$$+\infty - \infty \qquad \infty \times 0 \qquad \frac{\infty}{\infty} \qquad \frac{0}{0}$$

Nous pouvons à présent calculer quelques limites simples.

Exercice 5

1. $\lim\limits_{x\to +\infty} x^2 + x - 10$
2. $\lim\limits_{x\to -\infty} x^2 + x - 10$
3. $\lim\limits_{x\to -\infty} \dfrac{x^2+1}{x^3+1}$
4. $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{1}{x-2}$

IV.2 Théorèmes de comparaisons

Comme pour les suites, on peut utiliser des encadrements pour déterminer les limites d'une fonction.

Théorème 12. *a désigne un nombre réel, $+\infty$ ou $-\infty$.*

Hypothèse 1 *	***Hypothèse 2***	***Conclusion***
$f(x) \geqslant g(x)$	$\lim\limits_{x \to a} g(x) = +\infty$	$\lim\limits_{x \to a} f(x) = +\infty$
$f(x) \leqslant g(x)$	$\lim\limits_{x \to a} g(x) = -\infty$	$\lim\limits_{x \to a} f(x) = -\infty$
$g(x) \leqslant f(x) \leqslant h(x)$	*g et h ont la même limite ℓ en a*	$\lim\limits_{x \to a} f(x) = \ell$
$\|f(x) - l\| \leqslant g(x)$	$\lim\limits_{x \to a} g(x) = 0$	$\lim\limits_{x \to a} f(x) = \ell$

* pour x « assez proche de a »

Exercice 6

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^*$ par $f(x) = x \times \sin\left(\frac{1}{x}\right)$.

1. Calculer la limite de f en $+\infty$.
2. Calculer la limite de f en 0.

IV.3 Limite d'une composée de fonctions

Théorème 13. *a, b et l désignent des nombres réels, $+\infty$ ou $-\infty$.*
Si $\lim\limits_{x \to a} f(x) = b$ et $\lim\limits_{X \to b} g(X) = l$, alors $\lim\limits_{x \to a} g \circ f(x) = l$.

Exercice 7

Calculer $\lim\limits_{x \to +\infty} \sqrt{1 + \dfrac{1}{x^2}}$

IV.4 Croissances comparées

Théorème 14 (Croissances comparées)**.** *Pour tout entier naturel n :*

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x^n} = +\infty \qquad \lim_{x \to -\infty} x^n e^x = 0$$

Démonstration. □

Ce théorème est essentiel car il permet de lever des indéterminations de la forme $\dfrac{\infty}{\infty}$ et $0 \times \infty$ faisant intervenir l'exponentielle. Tout se passe comme si l'exponentielle « l'emporte »sur toute puissance de x, que ce soit en $+\infty$ ou en $-\infty$.

Exercice 8

Calculer $\lim\limits_{x \to +\infty} x^2 - e^x$.

IV.5 Suites et fonctions

Terminons avec deux théorèmes permettant de calculer des limites de suites « compliquées ».

Théorème 15. *Soient f une fonction et (u_n) la suite définie explicitement par $u_n = f(n)$. Soit ℓ un nombre réel, $+\infty$ ou $-\infty$.*
Si $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \ell$, alors $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = \ell$.

Théorème 16. *Soient f une fonction définie sur un intervalle I, et (u_n) une suite d'éléments de I.*
Soient a et ℓ deux réels, ou $+\infty$, ou $-\infty$.
Si $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = a$ et $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \ell$, alors $\lim\limits_{n \to +\infty} f(u_n) = \ell$.

Exercice 9

Déterminer la limite de la suite de terme général $\sqrt{2 + 0{,}8^n}$.