Chapitre 9 : Continuité

Table des matières

Notions au programme

- Fonction continue en un point (définition par les limites), sur un intervalle. Toute fonction dérivable est continue.
- Théorème des valeurs intermédiaires. Cas des fonctions continues strictement monotones.

La **continuité** d'une fonction signifie intuitivement que sa courbe se trace sans « trou » ni « saut » : on peut suivre le graphe sans lever le crayon sur un intervalle donné. On la définit rigourement avec la notion de limite.

On exploite la continuité à travers des théorèmes d'analyse comme le théorème des valeurs intermédiaires : si une fonction est continue sur un intervalle et prend deux valeurs de signes opposés, alors elle s'annule au moins une fois entre les deux. Cela permet de montrer l'existence (et parfois l'unicité) de solutions d'équations, de justifier des méthodes d'encadrement avec la calculatrice et de relier l'étude de fonctions aux problèmes concrets de modélisation.

I Notion de continuité

Exemple. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \begin{cases} x+1 & si \quad x<1 \\ 2-x & si \quad x \geqslant 1 \end{cases}$

Calculer $\lim\limits_{x \to 1^-} f(x)$ et $\lim\limits_{x \to 1^+} f(x)$. Que remarque-t-on ?

Définition 1. *Soit f une fonction définie sur un intervalle I. Soit $a \in I$.*
*On dit que f est **continue en** a si $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$.*
*On dit que f est **continue sur** I si f est continue en tout point de I.*

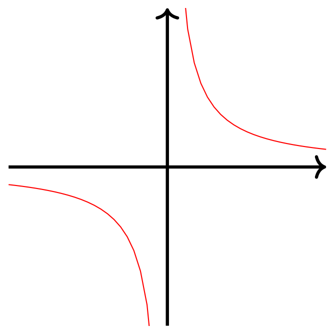
Remarques.

- Pour qu'une fonction soit continue en un point, il faut qu'elle soit définie en ce point.
- Un théorème sur les limites (énoncé dans le chapitre précédent) assure la continuité des fonctions polynômes, sinus, cosinus, racine carrée, valeur absolue, ainsi que les sommes, produits, quotients et composées de telles fonctions sur tout intervalle où elles sont définies.
- Toutes les fonctions ne sont pas continues, bien que ce soit couramment le cas.
- Graphiquement, la continuité se traduit par le fait que la courbe représentative de la fonction se trace de manière continue, « sans lever le crayon ».

Théorème 2. *Tout fonction dérivable est continue.*

Exemple. La fonction f définie par $f(x) = x^3 - 4x + \cos x$ est continue sur $\mathbb{R}$, comme somme d'une fonction poylnôme et de la fonction cosinus, continues sur $\mathbb{R}$.

Exemple. La fonction inverse est continue sur $]-\infty\,;0[$ et sur $]0\,;+\infty[$, mais pas sur $\mathbb{R}$: elle n'est même pas définie en 0 !
Graphiquement, il y a un « saut » au voisinage de 0.



Certaines fonctions peuvent être définies sur $\mathbb{R}$ mais non continues sur $\mathbb{R}$ tout entier, comme le montre l'exemple suivant.

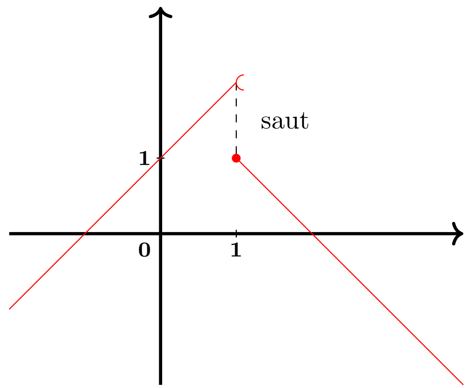
Exemple. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \begin{cases} x+1 & si \quad x<1 \\ 2-x & si \quad x \geqslant 1 \end{cases}$$

Cette fonction est définie en 1, mais elle n'est pas continue en 1. En effet :

$$\lim_{x \to 1^-} f(x) = 1+1 = 2$$

$$\lim_{x \to 1^+} f(x) = 2-1 = 1$$

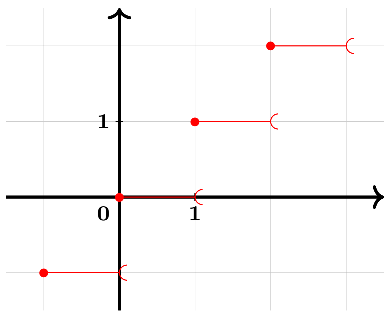


Exercice 1

Étudier la continuité de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \begin{cases} x-4 & si \quad x \geqslant 2 \\ x-x^2 & si \quad x<2 \end{cases}$$

Exemple. Un exemple de fonction non continue « bien connue » est la fonction **partie entière**.
La partie entière d'un réel est le plus grand entier qui le précède. Cette fonction est définie sur $\mathbb{R}$, mais discontinue en tout entier relatif.



Quel est l'intérêt d'avoir une fonction continue ? Avec une telle fonction, on dispose d'un théorème très important aux multiples applications.

II Théorème des valeurs intermédiaires

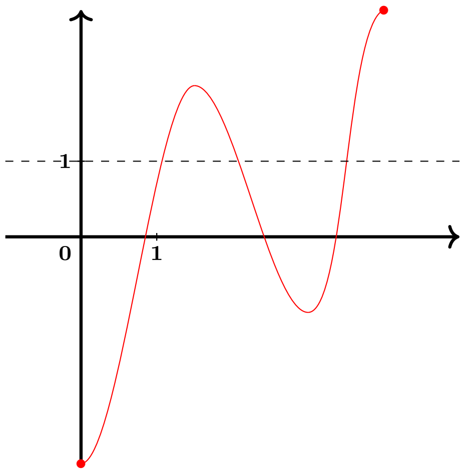
Théorème 3. *Soit f une fonction définie et **continue** sur un intervalle I.*
Soient $a, b \in I$, tels que $a < b$.
Pour tout réel k compris entre $f(a)$ et $f(b)$, il existe un réel c compris entre a et b tel que $k = f(c)$.

Démonstration. *Ce théorème est admis. La démonstration repose sur le principe de **dichotomie**, qui sera vu en TP.* □

Exemple. Soit f une fonction définie et continue sur $\mathbb{R}$, telle que $f(0) = -3$ et $f(4) = 3$.

Grâce au **TVI** (**T**héorème des **V**aleurs **I**ntermédiaires), on peut affirmer que l'équation $f(x) = 1$ admet au moins une solution dans l'intervalle $]0\,;4[$. On ne connait presque rien sur f, mais on sait qu'elle est continue.

Quand x varie entre 0 et 4, $f(x)$ varie entre -3 et 3. La fonction étant continue, elle « passe » nécessairement par 1. D'où l'existence d'(au moins) une solution.



Exemple. Le TVI s'applique dans des situations très concrètes :

- Lorsqu'une voiture accélère de 0 à 100 km/h, il existe un instant pour lequel la vitesse de la voiture est égal à 60 km/h. Cela est vrai car la vitesse de la voiture est une fonction **continue** du temps. Lors de l'accélération, on passe par toutes les vitesses entre 0 et 100 km/h.
- Si la température extérieure est de 20° à 12h00 et de 5° à 23h00, il existe un instant entre 12h00 et 23h00 où la température est égale à 11°. C'est la **continuité** de la température qui impose une nouvelle fois ce résultat.
- Encore mieux : il existe (au moins) 2 points antipodaux sur Terre où la température est identique. (ce n'est pas si trivial, voir exercices)

Exercice 2

Soit f une fonction continue sur l'intervalle $[-3\,;1]$, et telle que $f(-3) = -6$ et $f(1) = 4$. L'équation $f(x) = 0$ admet-elle des solutions sur $[-3\,;1]$?

III Théorème de la bijection

Théorème 4. *Soit f une fonction **continue** et **strictement monotone** sur un intervalle $[a\,;b]$.*
*Pour tout réel k compris entre $f(a)$ et $f(b)$, il existe un **unique** réel c compris entre a et b tel que $k = f(c)$.*

Remarque.

- Le théorème de la bijection est un corollaire du TVI. La condition supplémentaire *strictement monotone* assure l'**unicité** du réel c, solution de l'équation $f(x) = k$.
- Le théorème s'applique encore sur un intervalle de la forme $[a; b[$, $]a; b]$, ou avec $a = -\infty$ et/ou $b = +\infty$ (en remplaçant $f(a)$ et $f(b)$ par les limites de f en a et b).

Exemple. Soit f une fonction continue telle que :

x	-2	c	3
Variations de f	2	0	-1

La fonction f est **continue** et **strictement décroissante** sur $[-2\,;3]$, à valeurs dans $[-1\,;2]$. Comme $0 \in [-1\,;2]$, le théorème de la bijection assure l'existence **et l'unicité** d'un réel $c \in\,]-2\,;3[$ tel que $f(c) = 0$.

Remarques.

- On dit alors que f **réalise une bijection de** $[-2\,;3]$ **dans** $[-1\,;2]$, ce qui signifie qu'à tout réel k de l'intervalle $[-1\,;2]$, on associe un unique réel c dans l'intervalle $[-2\,;3]$ tel que $f(c) = k$.
- La seule information que donne le théorème est que $c \in\,]-2\,;3[$. On ne peut rien dire de plus !
- Dans un tableau de variations, une flèche traduira toujours la stricte monotonie et la continuité de la fonction sur l'intervalle considéré.

Exercice 3

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = e^x - 3x$.

1. Dresser le tableau de variations de f sur $[0; 1]$.
2. Démontrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution sur $[0; 1]$.

IV Applications

Résolution approchée d'équation

Une application importante du théorème des valeurs intermédiaires et du théorème de la bijection est la résolution approchée d'équations.

Exemple. On considère l'équation $x^3 + x = 1$.
On peut vérifier l'existence de solutions sur $\mathbb{R}$, en étudiant la fonction f définie par $f(x) = x^3 + x$, ce qui nous ramène à la résolution de l'équation $f(x) = 1$.

- f étant une fonction polynôme, elle est de fait continue sur $\mathbb{R}$.
- Pour tout réel x, $f'(x) = 3x^2 + 1 > 0$: f est donc strictement croissante sur $\mathbb{R}$.
- $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty < 1$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty > 1$

x	$-\infty$	α	$+\infty$
$f(x)$	$-\infty$	1	$+\infty$

La fonction f réalise une bijection de $\mathbb{R} =]-\infty; +\infty[$ dans $\mathbb{R}$: comme $1 \in]-\infty; +\infty[$, alors l'équation $f(x) = 1$ admet une unique solution α sur $\mathbb{R}$.

On peut faire mieux, et encadrer α par deux entiers consécutifs : comme $f(0) = 0$ et $f(1) = 2$, on a donc nécessairement $\alpha \in]0; 1[$.

x	$-\infty$	0	α	1	$+\infty$
$f(x)$	$-\infty$	0	1	2	$+\infty$

Exercice 4

Soit $f(x) = x^3 + x^2 - x + 1$.

1. Dresser le tableau de variations de f sur $\mathbb{R}$. On précisera les limites de f en $+\infty$ et $-\infty$.
2. Démontrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α sur $\mathbb{R}$.
3. Donner un encadrement de α par deux entiers consécutifs.
4. Donner un encadrement de α à 10^{-3} près à l'aide de la calculatrice.

Suite récurrente convergente

Une suite définie par une relation de récurrence de la forme $u_{n+1} = f(u_n)$ n'est pas nécessairement convergente, mais lorsque c'est le cas, et sous réserve que f soit continue sur un intervalle pas trop petit, alors le théorème suivant nous donne une façon de déterminer la limite de (u_n).

Théorème 5. *Soit (u_n) une suite de réels, définie par $u_0 \in \mathbb{R}$ et une relation de récurrence du type $u_{n+1} = f(u_n)$. Alors :*

$$\left\{ \begin{array}{c} (u_n) \text{ converge vers un réel } \ell \\ \text{et} \\ f \text{ est continue en } \ell \end{array} \right. \Longrightarrow \ell \text{ est solution de l'équation } \ell = f(\ell)$$

Exercice 5

Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = \sqrt{1 + u_n}$.
On admet que pour tout entier naturel n : $1 \leqslant u_n < u_{n+1} < 2$.

1. Justifier que (u_n) converge vers un réel $\ell \in [1; 2]$.
2. Déterminer la valeur de ℓ.