Exercices : Continuité

Exercice 01 Étudier la continuité de chacune des fonctions suivantes :

1. $f(x) = 3xe^x$
2. $g(x) = \begin{cases} 3x-7 & si \quad x<2 \\ 2x-5 & si \quad x \geqslant 2 \end{cases}$
3. $h(x) = \begin{cases} x^2-1 & si \quad x \leqslant 2 \\ 4-x & si \quad x>2 \end{cases}$

Exercice 02 Même exercice :

1. $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2+2x-3}{x-1} & si \quad x \neq 1 \\ 4 & si \quad x=1 \end{cases}$
2. $g(x) = \begin{cases} \dfrac{\sqrt{x^2+1}-1}{x} & si \quad x \neq 0 \\ 0 & si \quad x=0 \end{cases}$
3. $h(x) = \begin{cases} x^2 \sin\left(\dfrac{1}{x}\right) & si \quad x \neq 0 \\ 1 & si \quad x=0 \end{cases}$
4. $k(x) = \dfrac{x}{|x|}$

Exercice 03 Déterminer le nombre de solutions dans $\mathbb{R}$ de chacune des équations suivantes, puis donner un encadrement à 10^{-2} près de chaque solution à l'aide de la calculatrice.

1. $x^3+5x=2$
2. $x^2-x^4=1$
3. $x^2+\sqrt{x}-3=0$
4. $5x^3+8x+3=0$
5. $e^x=x$
6. $x^4=32x-48$
7. $x^3-5x=1$
8. $e^x=x+2$
9. $xe^x=1$

☞ *Il est préférable de se ramener à une équation de la forme $f(x)=0$*

Exercice 04 On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \dfrac{x^3-4}{x^2+1}$.

1. On pose $g(x) = x^3+3x+8$.
   (a) Étudier le sens de variation de g, et montrer que l'équation $g(x)=0$ admet sur $\mathbb{R}$ une unique solution α, dont on donnera un encadrement d'amplitude 0,01.
   (b) Préciser le signe de $g(x)$ sur $\mathbb{R}$.
2. On admet que f est dérivable sur $\mathbb{R}$.
   (a) Déterminer une expression de $f'(x)$ en fonction de $g(x)$.
   (b) Déduire des questions précédentes le sens de variation de f.
   (c) Déterminer les limites de f en $+\infty$ et $-\infty$, puis dresser son tableau de variations.
3. Démontrer que $f(\alpha) = \frac{3}{2}\alpha$.

Exercice 05 On se propose d'étudier la suite (u_n) définie par :

$$\begin{cases} u_0 &= 1 \\ u_{n+1} &= \dfrac{1}{3-u_n^2} \end{cases}$$

On admet que la suite est bien définie pour tout entier naturel n.

1. On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \dfrac{1}{3-x^2}$.
   (a) Préciser l'ensemble de définition de f, et calculer les limites à ses bornes.
   (b) Dresser le tableau de variations de f. Vérifier que f est croissante sur $[0;1]$.
2. On considère la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = x^3-3x+1$.

   Déterminer le nombre de solutions de l'équation $g(x)=0$ sur $\mathbb{R}$, et donner un encadrement à 0,01 de chacune d'elle.
3. Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n :

$$\frac{1}{3} \leqslant u_{n+1} \leqslant u_n \leqslant 1$$

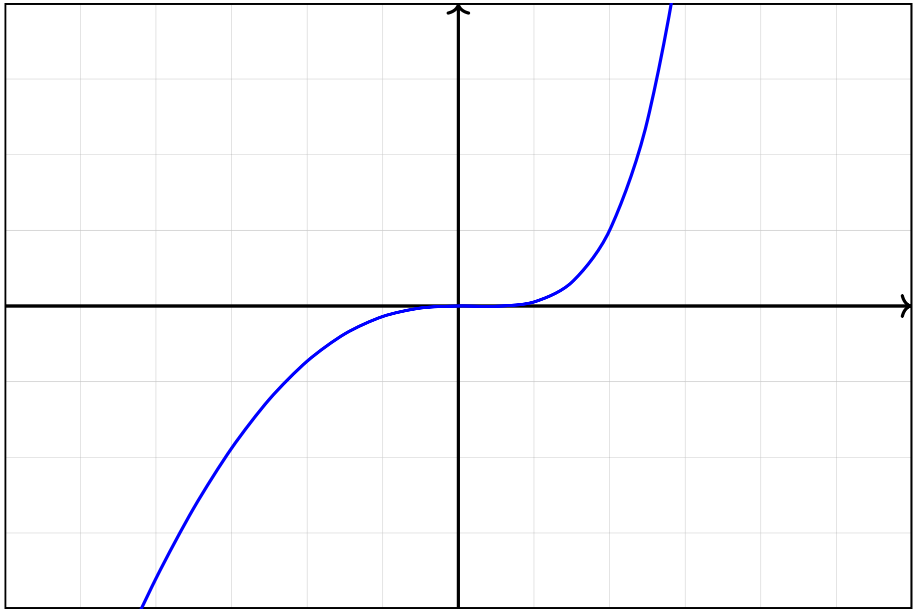
4. La suite (u_n) est-elle convergente ? Si oui, quelle est sa limite ?

Exercice 06 ***d'après Bac Blanc***

On considère la fonction numérique f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = x^2 e^{x-1} - \frac{x^2}{2}$$

Le graphique ci-dessous est la courbe représentative de cette fonction telle que l'affiche une calculatrice dans un repère orthonormal.



Partie A : Conjecture

À l'observation de cette courbe, quelle conjecture peut-on faire concernant le sens de variations de f sur $\mathbb{R}$?

Partie B : Contrôle de la conjecture

1. Calculer $f'(x)$ pour tout réel x, et l'exprimer à l'aide de l'expression $g(x)$ où g est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = (x+2)e^{x-1} - 1$.
2. *Étude du signe de $g(x)$ pour x réel*

   (a) Calculer la limite de $g(x)$ quand x tend vers $+\infty$.

   (b) Justifier que pour tout réel x, $g(x) = \frac{1}{e}xe^x + 2e^{x-1} - 1$.
   En déduire la limite de $g(x)$ quand x tend vers $-\infty$. Interpréter graphiquement le résultat.

   (c) Calculer $g'(x)$ et étudier son signe suivant les valeurs de x.

   (d) En déduire le sens de variations de la fonction g, puis dresser son tableau de variations.

   (e) Montrer que l'équation $g(x) = 0$ possède une unique solution dans $\mathbb{R}$. On note α cette solution. Montrer que $0,20 < \alpha < 0,21$.

   (f) Déterminer le signe de $g(x)$ suivant les valeurs de x.
3. *Sens de variations de la fonction f sur $\mathbb{R}$*

   (a) Étudier, suivant les valeurs de x, le signe de $f'(x)$.

   (b) En déduire le sens de variations de la fonction f sur $\mathbb{R}$.

   (c) Que penser de la conjecture ?

Un peu de théorie

Exercice 07 ★

Soit f une fonction définie et continue sur l'intervalle $[0; 1]$, à valeurs dans $[0; 1]$. Montrer que f possède au moins un point fixe dans $[0; 1]$, c'est à dire que l'équation $f(x) = x$ admet au moins une solution dans $[0; 1]$.

Exercice 08 ★

Soit f une fonction définie continue sur $\mathbb{R}$, périodique de période $T > 0$.
Montrer que l'équation $f(x) = f\left(x + \frac{T}{2}\right)$ admet au moins une solution sur $[0; T]$.

☞ *Poser* $g(x) = f(x) - f\left(x + \frac{T}{2}\right)$.

Application : démontrer que sur Terre, il existe deux points aux antipodes l'un de l'autre où la température y est strictement identique.

☞ *On pourra considérer un « grand cercle » ...*