Exercices de Cours : Continuité

I Notion de continuité

Exercice 01 Étudier la continuité de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \begin{cases} x-4 & si \quad x \geqslant 2 \\ x - x^2 & si \quad x < 2 \end{cases}$$

II Théorème des valeurs intermédiaires

Exercice 02 Soit f une fonction continue sur l'intervalle $[-3\,;1]$, et telle que $f(-3) = -6$ et $f(1) = 4$. L'équation $f(x) = 0$ admet-elle des solutions sur $[-3\,;1]$?

III Théorème de la bijection

Exercice 03 Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = e^x - 3x$.

1. Dresser le tableau de variations de f sur $[0;1]$.

2. Démontrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution sur $[0;1]$.

IV Applications

Résolution approchée d'équation

Exercice 04 Soit $f(x) = x^3 + x^2 - x + 1$.

1. Dresser le tableau de variations de f sur $\mathbb{R}$. On précisera les limites de f en $+\infty$ et $-\infty$.

2. Démontrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α sur $\mathbb{R}$.

3. Donner un encadrement de α par deux entiers consécutifs.

4. Donner un encadrement de α à 10^{-3} près à l'aide de la calculatrice.

Suite récurrente convergente

Exercice 05 Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = \sqrt{1 + u_n}$.
On admet que pour tout entier naturel n : $1 \leqslant u_n < u_{n+1} < 2$.

1. Justifier que (u_n) converge vers un réel $\ell \in [1; 2]$.

2. Déterminer la valeur de ℓ.