Exercices : Fonctions réciproques

Exercice 1. ***Bijection simple***
On considère la fonction f définie par :

$$f: \begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x+10 \end{array}$$

1. Démontrer que f réalise une bijection de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.
2. Compléter la phrase suivante, traduisant le résultat précédent :

   Pour tout $\ldots \in \ldots$, *il existe un unique* $\ldots \in \ldots$ *tel que* $y = f(x)$

3. On pose $y = f(x)$. Déterminer l'expression de x en fonction de y.
4. Si $y = f(x)$, on pose $x = f^{-1}(y)$, où f^{-1} est appelée **bijection réciproque** de f. Compléter :

$$f^{-1}: \begin{array}{rcl} \ldots & \longrightarrow & \ldots \\ x & \longmapsto & \ldots \end{array}$$

5. Pour tout réel x, calculer $f(f^{-1}(x))$ et $f^{-1}(f(x))$. Que remarque-t-on ?

Exercice 2. ***Toujours facile...***
On considère la fonction f définie par :

$$f: \begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & 5-3x \end{array}$$

1. Démontrer que f réalise une bijection de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.
2. Déterminer sa bijection réciproque.

Exercice 3. ***Bien choisir ses ensembles***
On considère la fonction f définie par :

$$f: \begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x^2 \end{array}$$

1. f réalise-t-elle une bijection de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$?
2. Démontrer que f réalise une bijection de $[0; +\infty[$ dans $[0; +\infty[$.
3. Déterminer sa bijection réciproque associée.
4. Représenter graphiquement f et f^{-1}. Que remarque-t-on ?

Exercice 4. ***Attention à l'ensemble d'arrivée...***

On considère la fonction f définie par :

$$f: \begin{array}{ccc} [0;+\infty[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \frac{x}{x+1} \end{array}$$

1. Étudier les variations de f sur $[0;+\infty[$.
2. Démontrer que f réalise une bijection de $[0;+\infty[$ dans un ensemble à préciser.
3. Déterminer sa bijection réciproque, en précisant son ensemble de définition.
4. Déterminer les plus grands intervalles I et J tels que :

$$\forall x \in I, f(f^{-1}(x)) = x \qquad\qquad \forall x \in J, f^{-1}(f(x)) = x$$

Exercice 5. ***Second degré***

On considère la fonction f définie par :

$$f: \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x^2-4x+1 \end{array}$$

1. Démontrer que f réalise une bijection de $[2;+\infty[$ dans un ensemble à préciser.
2. Déterminer sa bijection réciproque associée.

Exercice 6. ***Dérivée de la réciproque***

Soit f une fonction réalisant une bijection d'un intervalle I dans un intervalle J, et dérivable sur I.

1. Dériver l'égalité $f(f^{-1}(x)) = x$ (vraie pour $x \in J$) en supposant que f^{-1} est dérivable sur J.

   En déduire l'expression de $\left(f^{-1}\right)'(x)$:

$$\left(f^{-1}\right)'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}$$

2. À quelle condition l'expression précédente est-elle définie ?

   Interpréter graphiquement cette condition.
3. Démontrer que f et f^{-1} ont même sens de variations.
4. Dans cette question, $f(x) = x^2$ pour tout réel $x \in [0;+\infty[$.
   (a) Donner l'expression de $f^{-1}(x)$.
   (b) Utiliser la formule précédente pour retrouver un résultat connu.
5. Dans cette question, $f(x) = e^x$.
   (a) Justifier que f réalise une bijection de $\mathbb{R}$ dans $]0;+\infty[$.
   (b) Préciser le sens de variations de f^{-1} sur $]0;+\infty[$ ainsi que les valeurs suivantes :

$$f^{-1}(1) \qquad f^{-1}(e) \qquad \lim_{x\to 0^+} f^{-1}(x) \qquad \lim_{x\to+\infty} f^{-1}(x)$$

   (c) Utiliser la formule précédente pour déterminer $(f^{-1})'(x)$.