Travail en Groupe : Limites et Continuité

Sujet A *: Fonction auxilliaire*

Dans cet exercice, on se propose d'étudier la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \dfrac{x}{1+e^x}$.

Partie A : une fonction auxilliaire

Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = (x-1)e^x - 1$.

1. Déterminer les limites de g en $+\infty$ et en $-\infty$.
2. Dresser le tableau de variations de g sur $\mathbb{R}$.
3. Justifier que l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution sur $\mathbb{R}$, notée α, dont on donnera un encadrement à 10^{-2} près.
4. Donner le tableau de signes de $g(x)$ sur $\mathbb{R}$.

Partie B : variations de f

1. Déterminer les limites de f en $+\infty$ et en $-\infty$. Interpréter graphiquement.
2. Démontrer que pour tout réel x, $f'(x) = \dfrac{-g(x)}{(1+e^x)^2}$.
3. En déduire les variations de f sur $\mathbb{R}$.
4. Démontrer que $f(\alpha) = \alpha - 1$.

   ☞ *Revenir à la définition de α, et montrer que* $e^\alpha = \dfrac{1}{\alpha - 1}$

TRAVAIL EN GROUPE : LIMITES ET CONTINUITÉ

***Sujet B** : Continuité et Convexité*

Partie A

Soit p la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$p(x) = x^3 - 3x^2 + 5x + 1$$

1. Calculer les limites de p en $+\infty$ et en $-\infty$.
2. Déterminer les variations de p sur $\mathbb{R}$.
3. Justifier que l'équation $p(x) = 0$ admet une unique solution sur $\mathbb{R}$, que l'on notera α.

   Donner un encadrement de α à 10^{-2} près.
4. Déterminer le signe de $p(x)$ sur $\mathbb{R}$.

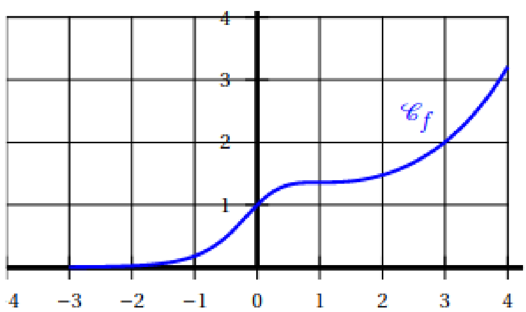
Partie B

Dans cette partie, on considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

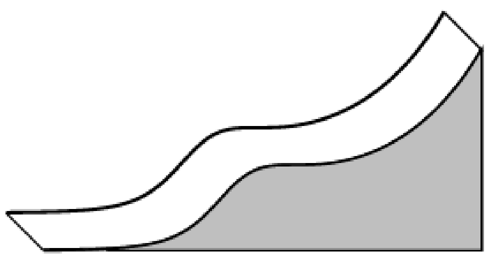
$$f(x) = \frac{e^x}{1 + x^2}$$

On note $\mathscr{C}$ sa courbe représentative dans un repère orthogonal.

1. (a) Calculer les limites de f en $+\infty$ et en $-\infty$. Interpréter graphiquement.
   (b) Étudier les variations de f sur $\mathbb{R}$.
   (c) Justifier que la courbe $\mathscr{C}$ admet une tangente horizontale au point d'abscisse 1.
2. Les concepteurs d'un toboggan utilisent la courbe $\mathscr{C}$ comme profil d'un toboggan. Ils estiment que le toboggan assure " de bonnes sensations " si le profil possède au moins deux points d'inflexion.



Représentation de la courbe $\mathscr{C}_f$


Vue de profil du toboggan

   (a) D'après le graphique ci-dessus, le toboggan semble-t-il assurer de bonnes sensations ? Justifier la réponse.

(b) Démontrer que pour tout réel $x \in \mathbb{R}$:

$$f''(x) = \frac{p(x)(x-1)e^x}{(1+x^2)^3}$$

où p est la fonction définie dans la partie A.

(c) En utilisant l'expression précédente de f'', répondre à la question : “ le toboggan assure-t-il de bonnes sensations ? ”. Justifier la réponse.

TRAVAIL EN GROUPE : LIMITES ET CONTINUITÉ

***Sujet C** : Suite implicite*

Pour tout entier naturel n non nul, on définit la fonction f_n sur $\mathbb{R}$ par $f_n(x) = x^n + x - 1$. On note $\mathscr{C}_n$ sa courbe représentative.

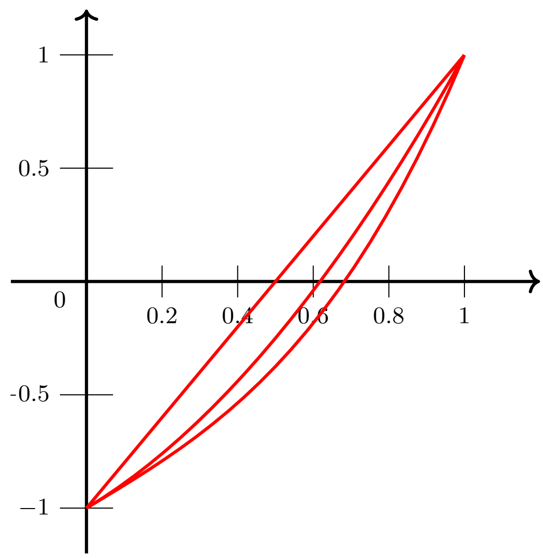
Partie A : étude de f_n

Dans toute cette partie, n désigne un entier naturel non nul.

1. Étudier, suivant la parité de n, les limites de f_n en $+\infty$ et $-\infty$.
2. Justifier que f_n est dérivable sur $\mathbb{R}$, et calculer $f_n'(x)$ pour tout réel x.
3. Démontrer que f_n est croissante sur $[0; 1]$.
4. Justifier que sur $[0; 1]$, l'équation $f_n(x) = 0$ admet une unique solution que l'on notera u_n.
5. Démontrer que pour tout entier k non nul et pour tout réel $x \in [0; 1]$, $f_{k+1}(x) \leqslant f_k(x)$.

Partie B : étude de (u_n)

1. Déterminer les valeurs exactes de u_1 et u_2.
2. Dans le graphique ci-dessous, on a représenté les courbes $\mathscr{C}_1$, $\mathscr{C}_2$, et $\mathscr{C}_3$ sur $[0; 1]$.



   Identifier chacune des courbres, et conjecturer le sens de variations de la suite (u_n).
3. En utilisant les résultats de la partie A, démontrer la conjecture précédente.
4. Déduire des questions précédentes que (u_n) est convergente. On notera ℓ sa limite.
5. En utilisant un raisonnement par l'absurde, démontrer que $\ell = 1$.