Chapitre 10 : Équations différentielles

Table des matières

Notions au programme

- Équation différentielle $y' = f$. Notion de primitive d'une fonction continue sur un intervalle.
- Équation différentielle $y' = ay$, où a est un nombre réel ; allure des courbes.
- Équation différentielle $y' = ay + b$.
- Pour une équation différentielle $y' = ay + f$: à partir de la donnée d'une solution particulière, déterminer toutes les solutions.

Une équation différentielle est une relation mathématique qui lie une fonction inconnue à ses dérivées, c'est-à-dire à la manière dont cette fonction varie. Elle permet de modéliser des phénomènes continus où l'évolution d'une quantité dépend de sa valeur actuelle, comme la température d'un objet au cours du temps, la vitesse d'un mobile ou la concentration d'une substance dans une réaction chimique.

Les applications des équations différentielles sont nombreuses en sciences. En physique, où elles interviennent dans l'étude des oscillations mécaniques (ressort, pendule) ou encore des circuits électriques (RL, RC, RLC). En biologie, elles servent à modéliser la croissance de populations ou la diffusion d'épidémies.

I Notion d'équation différentielle

Définition 1. *Une **équation différentielle** est une équation dont les inconnues sont des fonctions, se présentant généralement sous la forme d'une relation entre ces fonctions et leurs dérivées.*

Exemple. L'équation $(E) : y' + y = x$ est une équation différentielle d'inconnue y, une fonction de la variable x, dérivable sur $\mathbb{R}$, vérifiant l'égalité :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad y'(x) + y(x) = x$$

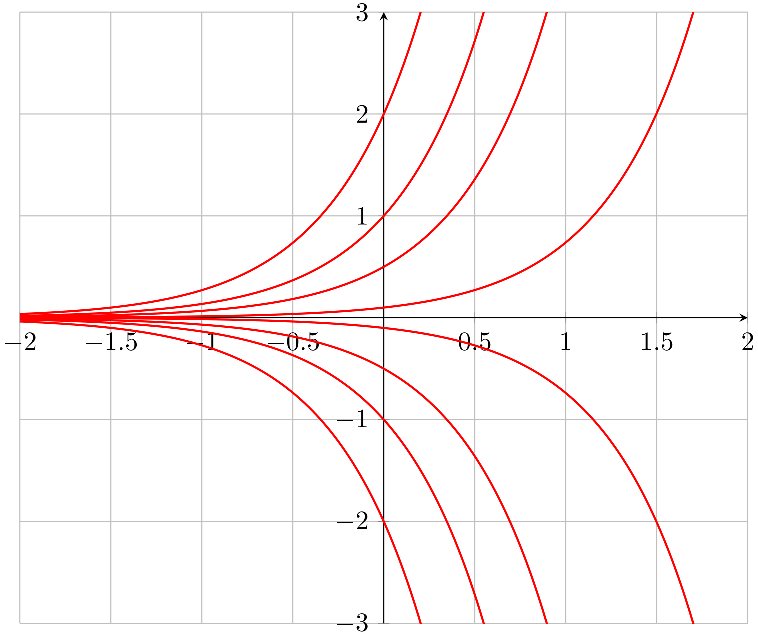
On peut montrer qu'une solution est $y_1 : x \mapsto \mathrm{e}^{-x} + x - 1$.

En général, une équation différentielle admet une infinité de solutions.

Exercice 1

Soit l'équation différentielle $(E) : y' = 2y$.
Montrer que pour tout réel C, la fonction $x \in \mathbb{R} \mapsto C\mathrm{e}^{2x}$ est solution de (E).

Une représentation graphique des solutions de l'équation précédente (pour différentes valeurs de C) est :



II Équation $y' = f$

Exemple. Considérons l'équation différentielle :

$$y' = 3$$

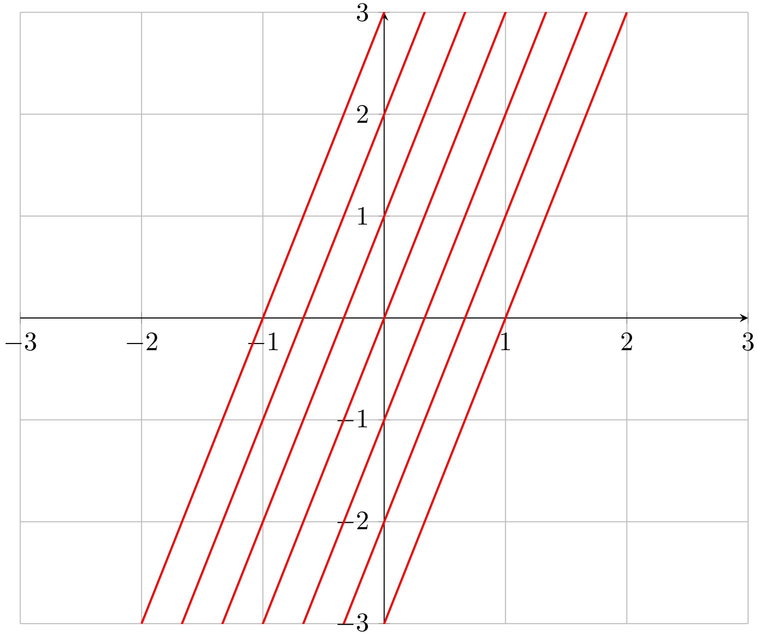
L'ensemble des solutions de cette équation différentielle très simple n'est rien d'autre que **l'ensemble des primitives** de la fonction constante égale à 3, c'est à dire l'ensemble des fonctions y définies sur $\mathbb{R}$ dont l'expression est de la forme :

$$y(x) = 3x + k \qquad k \in \mathbb{R}$$

On note encore :

$$\mathscr{S} = \{y : x \mapsto 3x + k, \quad k \in \mathbb{R}\}$$

Graphiquement, ces fonctions forment un **famille** de courbes (ci-dessous, les courbes pour des valeurs entières de k entre -3 et 3) :



En réalité, il y a une infinité de solutions !

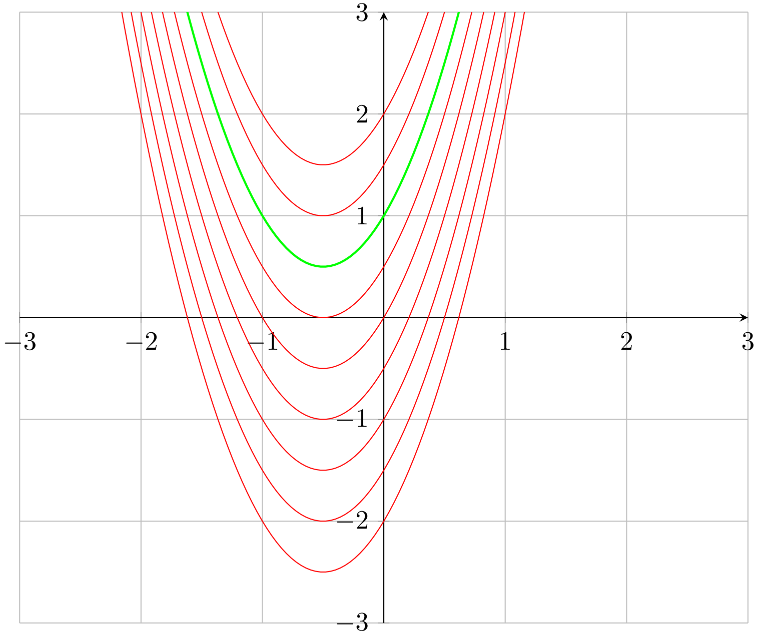
Propriété 2. *Soient x_0 et y_0 deux réels donnés, et f une fonction.*
L'équation différentielle $y' = f$ vérifiant la condition initiale $y(x_0) = y_0$ admet une unique solution.

Exercice 2

Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation différentielle suivante :

$$\begin{cases} y' &= 4x+2 \\ y(0) &= 1 \end{cases}$$

Aspect des fonctions solutions de l'équation $y' = 4x+2$. En vert, l'unique fonction vérifiant la condition initiale $y(0) = 1$.



III Équation $y' = ay$ ($a \in \mathbb{R}$)

Théorème 3. *Les fonctions solutions de l'équation différentielle $y' = ay$ (a réel donné) sont les fonctions $x \longmapsto Ce^{ax}$, où C est une constante arbitraire.*

Démonstration. *Si $y(x) = Ce^{ax}$, alors $y'(x) = aCe^{ax} = ay(x)$ et donc y est bien solution de $y' = ay$.*
Réciproquement, si y désigne une solution de $y' = ay$, posons $z(x) = e^{-ax}y(x)$. z est dérivable sur $\mathbb{R}$ et :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad z'(x) = -ae^{-ax}y(x) + e^{-ax}y'(x) = e^{-ax}(y'(x) - ay(x)) = 0$$

Ainsi, z est constante sur $\mathbb{R}$: $\exists C \in \mathbb{R} \ / \ \forall x \in \mathbb{R}, \ z(x) = C$.
Or, $z(x) = e^{-ax}y(x) \implies y(x) = z(x)e^{ax} \implies y(x) = Ce^{ax}$. D'où :

$$\boxed{\exists C \in \mathbb{R} \ / \ \forall x \in \mathbb{R}, y(x) = Ce^{ax}}$$

□

Exercice 3

Résoudre l'équation différentielle $2y' + 3y = 0$ sur $\mathbb{R}$.

IV Équation $y' = ay + f$

Dans cette section, on considère l'équation différentielle $y' = ay + f$, où a est un réel donné, et f une fonction quelconque, continue sur un intervalle I.

IV.1 Cas général (Hors Programme)

Théorème 4. *Les fonctions solutions de l'équation différentielle $y' = ay + f$ sont les fonctions $x \longmapsto y_0(x) + y_p(x)$, où :*

- *y_0 est une solution de l'équation $(H) : y' = ay$, dite* ***équation homogène***
- *y_p est une* ***solution particulière*** *de l'équation (E)*

Remarque. Le théorème 3 nous dit que $y_0(x)$ est de la forme Ce^{ax}, avec $C \in \mathbb{R}$.
Quant à y_p, il « suffit » de trouver une fonction convenable solution de l'équation initiale, ce qui n'est pas toujours évident...

Démonstration. *Notons $(E) : y' = ay + f$ et $(H) : y' = ay$, équation homogène associée. La démonstration repose sur l'équivalence suivante, y_p désignant une solution particulière de (E) (c'est à dire $y_p' = ay_p + f$, ou encore $y_p' - ay_p = f$) :*

$$y \text{ solution de } (E) \iff y - y_p \text{ solution de } (H)$$

En effet :

$$\begin{aligned} y - y_p \text{ solution de } (H) &\iff (y-y_p)' = a(y-y_p) \\ &\iff y' - y_p' = ay - ay_p \\ &\iff y' = ay + \underbrace{(y_p' - ay_p)}_{=f} \\ &\iff y' = ay + f \\ &\iff y \text{ est solution de } E \end{aligned}$$

Grâce au théorème 3, on a :

$$\begin{aligned} y - y_p \text{ solution de } (H) &\iff y - y_p = Ce^{ax}, C \in \mathbb{R} \\ &\iff y = Ce^{ax} + y_p, C \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

Ainsi, on a bien :

$$y \text{ solution de } (E) \iff y = y_0 + y_p$$

où y_0 désigne une solution de (H) et y_p une solution particulière de (E). □

Remarque. Le théorème 4 est malheureusement hors programme, mais il faut savoir redémontrer l'équivalence « y solution de $(E) \iff y - y_p$ solution de (H) » pour l'examen du baccalauréat.

Théorème 5. *Soient x_0 et y_0 deux réels.*
Il existe une unique solution à l'équation différentielle $y' = ay + f$ vérifiant la condition initiale $y(x_0) = y_0$.

Exercice 4

On considère l'équation différentielle $(E) : y' = 3y - \mathrm{e}^x$, ainsi que l'équation homogène associée $(H) : y' = 3y$.

1. Montrer que la fonction $u : x \mapsto \frac{\mathrm{e}^x}{2}$ est solution de (E).
2. Démontrer l'équivalence : y solution de $(E) \iff y - u$ solution de (H)
3. Déterminer l'ensemble des solutions de (H).
4. Déduire des questions précédentes l'ensemble des solutions de (E).
5. Déterminer l'unique solution f de (E) vérifiant la condition $f(0) = 0$.

IV.2 Cas particulier : $y' = ay + b$ $(a, b \in \mathbb{R})$

Le cas particulier où f est une fonction constante est au programme !

Théorème 6. *Les fonctions solutions de l'équation différentielle $y' = ay + b$ (a et b réels donnés, $a \neq 0$) sont les fonctions $x \longmapsto Ce^{ax} - \dfrac{b}{a}$, où C est une constante arbitraire.*

Exercice 5

Résoudre l'équation différentielle $y' = -0.5y + 1$ sur $\mathbb{R}$.