Exercices : Équations différentielles

Exercice 1. Dans chacun des cas suivants, résoudre l'équation différentielle donnée :

1. $y' = 2y$
2. $y' + 3y = 0$
3. $-y' + y = 0$
4. $7y' + 8y = 0$

Exercice 2. Mettre l'équation différentielle sous la forme $y' = ay + b$, puis la résoudre :

1. $y' + 2y = 3$
2. $y' - 5 = y$
3. $3y' - 2y + 1 = 0$
4. $\sqrt{2}y' = 2y - 4$
5. $y' = 100(y - 3)$
6. $y' = 0,1(100 - y)$

Exercice 3. Résoudre les équations différentielles données, où une condition initiale est précisée :

1. $y' = 4y - 3$ $\quad y(0) = -1$
2. $y' = -y + 1$ $\quad y(2) = 6$
3. $y' + 0,03y = 5$ $\quad y(0) = 200$
4. $y' = 500 - 0,1y$ $\quad y(10) = 0$

Exercice 4. On considère l'équation différentielle :

$$(E) : y' - 2y = 1 - 6x$$

1. Démontrer que la fonction $g : x \longrightarrow 3x + 1$ définie sur $\mathbb{R}$ est solution de (E).

   ☞ *g est appelée **solution particulière** de l'équation différentielle*

2. Résoudre l'équation différentielle :
$$(H) : y' - 2y = 0$$

   ☞ *(H) est appelée **équation homogène associée** à l'équation (E)*

3. Démontrer que : $\quad y$ est solution de $(E) \iff (y - g)$ est solution de (H).
4. En déduire les solutions de (E).
5. Résoudre de la même manière l'équation différentielle $y' - 2y = e^x$, en montrant que $g : x \longrightarrow -e^x$ est une solution particulière.

Exercice 5. On considère l'équation différentielle suivante : $\quad (E) : 2y' + 3y = 6x - 5$

1. Déterminer deux réels a et b telle que $g : x \longrightarrow ax + b$ soit solution de (E).
2. Résoudre l'équation homogène associée : $\quad (H) : 2y' + 3y = 0$
3. En déduire les solutions de (E).

Exercice 6. Même exercice :

$$(E) : 2y' + 3y = 6x^2 - 7x + 2 \qquad g : x \longrightarrow ax^2 + bx + c$$

Exercice 7. On considère l'équation différentielle :

$$(E) : y' - 2y = xe^x$$

1. Résoudre l'équation homogène associée (H).
2. Soient a et b deux réels et u la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $u(x) = (ax + b)e^x$.

   (a) Déterminer a et b pour que u soit solution de (E).

   (b) Démontrer que y est solution de $(E) \iff (y - u)$ est solution de (H).
3. En déduire les solutions de (E).
4. Déterminer la solution f de (E) telle que $f(1) = 0$.

Exercice 8. On désigne par $q(t)$ la température (exprimée en degré Celsius) d'un corps à l'instant t (exprimé en minutes). D'après la loi de refroidissement de Newton, la vitesse de refroidissement $q'(t)$ est proportionnelle à la différence entre la température du corps $q(t)$ et celle de la salle T.

1. Traduire la loi de refroidissement de Newton en une équation différentielle. On appelera α la constante de proportionnalité.
2. On verse du café à 80°C dans une tasse, dans une pièce où la température est de 20°C.

   (a) Réécrire l'équation différentielle précédente en précisant la condition initiale.

   (b) Résoudre cette équation, en fonction de α.
3. Au bout de deux minutes, le café est à 60°C. Déterminer la valeur de α.
   Donner l'expression de $q(t)$ correspondante.
4. Calculer la limite de q en $+\infty$. Interpréter ce résultat.
5. Dresser le tableau de variation de q.
6. Au bout de combien de temps la personne pourra-t-elle déguster son café, sachant qu'elle aime le consommer à 40°C ?