Exercices : Équations différentielles 2

Exercice 1. ***Vitesse de chute***

La deuxième loi de Newton nous dit que pour un corps de masse m (constante), l'accélération $\overrightarrow{a}$ de son centre d'inertie est proportionnelle à la somme des forces extérieures qu'il subit :

$$m\overrightarrow{a} = \sum \overrightarrow{F_i}$$

Partie A

On considère dans cette question un objet de masse m en chute libre verticale. On peut montrer, à partir de l'équation précédente, que sa vitesse verticale absolue $v(t)$ (t en secondes) vérifie l'équation différentielle :

$$my' = mg$$

où g est une constante.

1. Résoudre l'équation différentielle ci-dessus, en fonction de m et g.
2. L'objet est laché sans vitesse initiale, c'est à dire que la fonction v vérifie l'équation $v(0) = 0$.

   Donner l'expression de $v(t)$.
3. Calculer $\lim\limits_{t \to +\infty} v(t)$. Interpréter ce résultat.
4. On note $z(t)$ la hauteur de l'objet par rapport au sol au cours du temps.

   Déterminer l'expression de $z(t)$, sachant que z est la primitive de v et que l'objet est laché depuis une hauteur de 1,43m.
5. Les résultats précédents dépendent-ils de la masse de l'objet considéré ?
6. En 1971, l'astronaute David Scott a laché simultanément, depuis le sol lunaire, un marteau et une plume depuis une même hauteur de 1,43m, et sans vitesse initiale. Sachant que $g \approx 1,6$ m/s^2 :

   (a) Au bout de combien de temps les objets touchent-t-il le sol ?

   (b) Quelles sont leurs vitesses au moment de l'impact ?

Partie B

En présence d'une atmosphère, il existe des forces de frottement qui s'opposent au mouvement de notre objet qui chute, proportionnelles à sa vitesse. On considère alors que la fonction v vérifie l'équation différentielle suivante :

$$my' = mg - ky \qquad y(0) = 0$$

1. Résoudre l'équation différentielle ci-dessus, en fonction de m, g et k.

   En déduire l'expression de $v(t)$.
2. Un parachutiste saute depuis une hauteur de 4000m. On donne $m = 80$kg, $g = 10$m/s^2 et $k = 15$kg/s.

   (a) Déterminer l'expression de $v(t)$, puis celle de $z(t)$ (l'altitude du parachutiste au cours du temps).

   (b) Étudier la fonction v sur l'intervalle $[0; +\infty[$ (variations, limites...)

   (c) Le parachutiste ouvre son parachute lorsqu'il arrive à 1500m d'altitude. Quel est le temps de chute ?

Exercice 2. ***Taux d'alcoolémie***

Lorsqu'une personne absorbe à jeun une certain quantité d'alcool, on note $f(t)$ le taux d'alcoolémie (en gramme par litre de sang) à l'instant t (en heures) de son organisme. On considère que f est définie par l'équation différentielle :

$$f'(t) = ae^{-t} - f(t) \qquad f(0) = 0$$

où a est une constante positive dépendant de la personne et de la quantité absorbée.

1. On pose $g(t) = e^t f(t)$. Démontrer que g est une fonction affine, en calculant $g'(t)$.
2. Exprimer $f(t)$ en fonction de a et t.
3. On pose $a = 5$.
   (a) Étudier la fonction f sur $[0\,;+\infty[$. Déterminer le taux d'alcoolémie maximal et le temps au bout duquel ce taux est atteint.
   (b) Combien de temps faut-il attendre pour que le taux d'alcoolémie de la personne redescende sous la barre des 0,5g/L ?

Exercice 3. ***Loi logistique***

Pour certaines populations vivant dans un milieu clos (comme des bactéries dans une culture), on constate que la croissance est quasiment exponentielle au début, mais elle est freinée dès que la surpopulation se fait sentir (manque de nourriture ou d'oxygène, interactions dues à la promiscuité...).

Le mathématicien belge Pierre Verhulst propose vers 1840 le modèle suivant : on suppose que la taille de la population ne peut pas dépasser une certaine valeur maximale, et on note $f(t)$ la **fraction** de ce maximum à l'instant t. Alors, f est solution de l'équation différentielle :

$$y' = \lambda y(1-y) \qquad (E)$$

1. En supposant que $y > 0$, résoudre l'équation (E) en posant $z = \dfrac{1}{y}$.
2. Sachant que $\lambda > 0$ et $f(0) = 0,01$, exprimer $f(t)$ en fonction de t et de λ.
3. Étudier les variations et la convexité de f sur $[0\,;+\infty[$.