Chapitre 11 : Logarithme népérien

Table des matières

Notions au programme

- Fonction logarithme népérien, notée ln, construite comme réciproque de la fonction exponentielle.
- Propriétés algébriques du logarithme.
- Fonction dérivée du logarithme, variations.
- Limites en 0 et en $+\infty$, courbe représentative. Lien entre les courbes représentatives des fonctions logarithme népérien et exponentielle.
- Croissance comparée du logarithme népérien et de $x \mapsto x^n$ en 0 et en $+\infty$.
- Utiliser l'équation fonctionnelle de l'exponentielle ou du logarithme pour transformer une écriture, résoudre une équation, une inéquation.
- Dans le cadre d'une résolution de problème, utiliser les propriétés des fonctions exponentielle et logarithme.

Dans un précédent chapitre, nous avons découvert la fonction exponentielle et ses propriétés. Elle vérifie en particulier l'équation fonctionnelle :

$$\forall x, y \in \mathbb{R}, \quad f(x+y) = f(x) \times f(y)$$

L'exponentielle ¡¡ transforme les sommes en produits ¿¿. L'exponentielle réalise également une bijection de $\mathbb{R}$ dans $]0\,;+\infty[$, ce qui signifie que pour tout réel $y \in]0\,;+\infty[$, l'équation $e^x = y$ a une unique solution $x \in \mathbb{R}$.

À tout réel $y \in]0\,;+\infty[$, on associe un unique réel x : on définit ainsi une nouvelle fonction, la fonction **logarithme népérien**.

$$\begin{tikzcd} \mathbb{R} \arrow[r, bend left, "\exp"] &]0\,;+\infty[\arrow[l, bend left, "\ln"] \end{tikzcd}$$

I Définition

Définition 1. *La fonction **logarithme népérien** est la* bijection réciproque *de la fonction exponentielle. Elle est notée* **ln***.*

$$\left\{\begin{array}{lcl} y & = & \ln x \\ x & \in &]0\,;+\infty[\end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{lcl} x & = & e^y \\ y & \in & \mathbb{R} \end{array}\right.$$

x	$-\infty$	$\ln(y)$	$+\infty$
exp	0	y	$+\infty$

Les conséquences immédiates de la définition sont les suivantes :

- La fonction ln est définie sur $\mathbb{R}_+^*$, à valeurs dans $\mathbb{R}$
- Pour tout réel x, $\ln(e^x) = x$
- $\ln 1 = 0$ et $\ln e = 1$
- Pour tout réel $x > 0$, $e^{\ln x} = x$

Remarque. La fonction ln est à la fonction exponentielle ce que la fonction racine carrée est à la fonction carrée.

Exercice 1

Résoudre l'équation $e^{2x-1} = 3$.

Exercice 2

Quel est l'ensemble de définition de la fonction $x \mapsto \ln\left(\dfrac{x-1}{x+1}\right)$?

II Propriétés algébriques

Théorème 2. *Soient $a, b \in \mathbb{R}_+^*$ et $n \in \mathbb{Z}$.*

$$\ln(a \times b) = \ln a + \ln b$$

$$\ln\left(\frac{a}{b}\right) = \ln a - \ln b \qquad \ln\left(\frac{1}{b}\right) = -\ln b$$

$$\ln\left(a^n\right) = n \times \ln a \qquad \ln\left(\sqrt{a}\right) = \frac{1}{2}\ln a$$

Démonstration. *Pour démontrer ce théorème, on se sert évidemment de la fonction exponentielle. Étant donnés deux réels strictement positifs a et b, on a d'une part :*

$$a \times b = e^{\ln(a \times b)}$$

et d'autre part :

$$\left\{\begin{array}{lcl} a & = & e^{\ln a} \\ b & = & e^{\ln b} \end{array}\right. \implies a \times b = e^{\ln a} \times e^{\ln b} = e^{\ln a + \ln b}$$

D'où $e^{\ln(a\times b)} = e^{\ln a + \ln b}$. Or $e^x = e^y \iff x = y$, car la fonction exponentielle est bijective. D'où :

$$\boxed{\ln(a \times b) = \ln a + \ln b}$$

Les autres propriétés sont des conséquences de cette égalité :

- $\underline{\ln\left(\frac{a}{b}\right) = \ln a - \ln b}$ *: il suffit d'écrire que $a = b \times \frac{a}{b}$:*

$$\ln a = \ln\left(b \times \frac{a}{b}\right) = \ln b + \ln\left(\frac{a}{b}\right) \implies \ln\left(\frac{a}{b}\right) = \ln a - \ln b$$

- $\underline{\ln\left(\frac{1}{b}\right) = -\ln b}$ *: d'après l'égalité précédente :*

$$\ln\left(\frac{1}{b}\right) = \ln 1 - \ln b = -\ln b \quad (\ln 1 = 0)$$

- $\underline{\ln\left(a^n\right) = n \times \ln a}$ *: d'après la première égalité, on a :*

$$\ln(2a) = \ln(a + a) = \ln a + \ln a = 2\ln a$$

$$\ln(3a) = \ln(a + 2a) = \ln a + \ln(2a) = 3\ln a$$

Par une récurrence évidente, on a donc, pour $n \in \mathbb{N}$:

$$\ln\left(a^n\right) = n \times \ln a$$

Mais l'égalité reste vraie pour $n < 0$:

$$\ln(a^{-n}) = \ln\frac{1}{a^n} = -\ln a^n = -n\ln a = (-n)\ln a$$

- $\underline{\ln\left(\sqrt{a}\right) = \frac{1}{2}\ln a}$ *:*

$$\ln a = \ln\left(\sqrt{a}^2\right) = 2\ln\left(\sqrt{a}\right) \implies \ln\left(\sqrt{a}\right) = \frac{1}{2}\ln a$$

$\square$

Remarque. Ce théorème est <u>fondamental</u> : c'était la raison d'être de la fonction ln avant que les calculatrices ne voient le jour. Afin de calculer plus rapidement de produits complexes, les mathématiciens et physiciens de l'époque utilisaient des tables de correspodances (dites ¡¡ logarithmiques ¿¿), transformant les produits en sommes, qui étaient bien plus faciles à calculer. Une fois la somme effectuée, on revenait au produit grâce à la table logarithmique.

Exercice 3

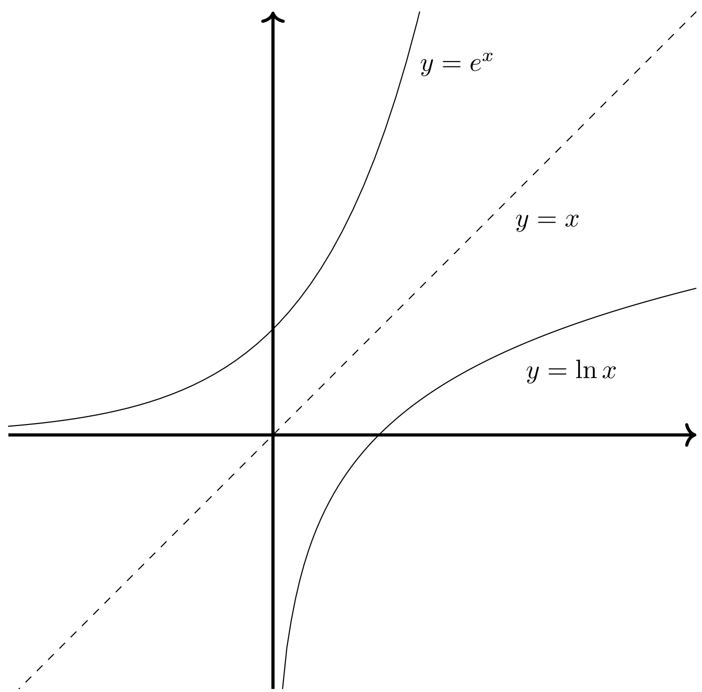
Exprimer les nombres suivants à l'aide de $\ln 2$ et $\ln 3$:

$$\ln 12 \qquad \ln 72 \qquad \ln\left(\frac{9}{4}\right)$$

III Étude de la fonction ln

III.1 Dérivée, variations et signe

La courbe représentative de la fonction ln se déduit de celle de l'exponentielle par la réflexion d'axe $y = x$:



Théorème 3.

$$\lim_{x \to 0^+} \ln x = -\infty \qquad \lim_{x \to +\infty} \ln x = +\infty$$

Théorème 4. *La fonction* ln *est dérivable sur* $\mathbb{R}_+^*$*, et pour tout réel* $x > 0$ *:*

$$\ln'(x) = \frac{1}{x}$$

Ce théorème a les conséquences importantes suivantes :

- La fonction ln est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+^*$
- $\ln x > 0 \iff x > 1$

x	0		1		$+\infty$
ln	$-\infty$	↗	0	↗	$+\infty$

En application de la dérivée d'une fonction composée, on obtient la propriété suivante :

Propriété 5. *Soit* u *une fonction dérivable sur un intervalle* I*, strictement positive sur* I*. Alors la fonction* $\ln(u)$ *est dérivable sur* I *et :*

$$(\ln(u))' = \frac{u'}{u}$$

Exercice 4

Calculer les dérivées des fonctions suivantes :

$$f(x) = \ln\left(x^2 + 1\right) \qquad g(x) = \ln\left(\frac{1}{x+1}\right)$$

Propriété 6.

$$\lim_{x \to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$$

Démonstration. *Il s'agit du nombre dérivé de* ln *en 1.* ln *est dérivable en 1 donc par définition :*

$$\lim_{h \to 0} \frac{\ln(1+h) - \ln 1}{h} = \ln'(1)$$

Or $\ln 1 = 0$ *et* $\ln'(1) = \frac{1}{1} = 1$*, d'où le résultat.* □

III.2 Croissances comparées

Contrairement à la fonction exponentielle qui est « plus forte que toute puissance de x », la fonction ln est « plus faible que toute puissance de x ».

Théorème 7. *Pour tout entier $n \geqslant 1$:*

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x^n} = 0 \qquad \lim_{x \to 0^+} x^n \ln x = 0$$

IV Applications

IV.1 Logarithme décimal log

Définition 8. *La fonction **logarithme décimal**, notée **log**, est la fonction définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par :*

$$\log x = \frac{\ln x}{\ln 10}$$

Propriété 9. *Pour tout entier naturel n, $\log(10^n) = n$.*

Démonstration. *Soit $n \in \mathbb{N}$. $\log 10^n = \frac{\ln 10^n}{\ln 10} = \frac{n \ln 10}{\ln 10} = n$.* □

Propriété 10. *La fonction log est croissante sur $\mathbb{R}_+^*$.*

Démonstration. *Pour tout $x > 0$, $\log x = \frac{1}{\ln 10} \times \ln x$. Or $\ln 10 > 0$ donc log et ln ont mêmes sens de variations.* □

La fonction logarithme décimal est très utilisée en sciences physiques, en particulier lorsque l'on étudie des phénomènes dont les valeurs varient sur plusieurs puissances de 10. C'est le cas du calcul du pH, de l'intensité sonore, de la magnitude d'un astre...

En arithmétique, elle a une application intéressante :

Propriété 11. *Soit $N \in \mathbb{N}$. Le nombre de chiffres dans l'écriture décimale de N est $E(\log N) + 1$, où E désigne la partie entière.*

Démonstration. *Soit $N \in \mathbb{N}$. N est compris entre deux puissances de 10 consécutives, donc il existe un entier naturel p tel que :*

$$10^p \leqslant N < 10^{p+1}$$

Le nombre de chiffres dans l'écriture décimale de N est égal à $p+1$.
La fonction log étant croissante, on a :

$$\log 10^p \leqslant \log N < \log 10^{p+1}$$

D'où :

$$p \leqslant \log N < p+1$$

On a donc $E(\log N) = p$, donc $E(\log N) + 1 = p + 1$.
Ainsi, le nombre de chiffres dans l'écriture décimale de N est égal à $E(\log N) + 1$. □

Exemple. Combien de chiffres comporte le nombre 3773^{7337} ?

IV.2 Puissance d'un nombre réel

Grâce au logarithme, on peut définir la puissance réelle d'un nombre réel strictement positif :

Définition 12. *Pour tout réel $a > 0$ et pour tout réel b, on pose :*

$$a^b = e^{b \ln a}$$

Remarque. Cette définition de la puissance d'un nombre réel est en accord avec la définition usuelle de la puissance.
Grâce à cette définition, on peut calculer des puissances comme $2^{1,8}$, $3^{-\sqrt{2}}$ ou encore $\pi^{\pi-1}$.
On peut également définir la fonction $x \mapsto 3^x$, où $x \in \mathbb{R}$.

Remarque. Les régles de calcul sur les puissances restent vraies pour $a > 0$ et b réels.

Remarque. Avec cette définition, on retrouve notamment que $a^0 = 1$, pour $a > 0$. Bien que la formule ne soit pas définie pour $a = 0$, cette dernière nous donnerait le résultat suivant :

$$0^0 = e^{0 \times \ln 0}$$

C'est une forme indéterminée, car $\lim_{x \to 0} \ln x = -\infty$. Ainsi, 0^0 n'a pas de sens.