Exercices : Logarithme népérien

Définition du logarithme

Exercice 01 Résoudre directement les équations suivantes :

1. $e^x = 4$
2. $2e^x - 1 = 0$
3. $e^{-2x} = 16$
4. $e^{x-2} = 1$
5. $\ln x = 3$
6. $\ln 2x = -5$
7. $(\ln x)^2 = 16$
8. $\ln(x^2 + 5) = 9$

Exercice 02 Déterminer l'ensemble de définition de chacune des fonctions suivantes :

$$f(x) = \ln(1 - 3x) \qquad g(x) = \ln(x^2 - 1) \qquad h(x) = \ln(1 - e^x)$$

Exercice 03 Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes, en précisant à chaque fois l'ensemble de résolution :

1. $\ln(3x - 1) = \ln 5$
2. $\ln x - \ln(2x - 7) = 0$
3. $\ln(3x + 1) = \ln(x - 3)$
4. $e^{1+\ln x} = 1$
5. $(\ln x)^2 + \ln x - 2 = 0$
6. $e^{2x} + 3e^x - 4 = 0$

Propriétés algébriques

Exercice 04 Exprimer les réels suivants sous la forme $\ln a$, $a > 0$:

1. $\ln 3 + \ln 4$
2. $\ln 12 + \ln 2$
3. $\ln 8 - \ln 3$
4. $\ln 6 + \ln 4 - \ln 3$
5. $2\ln 2 - \ln 6$
6. $3\ln 3 + 2\ln 4$

Exercice 05 Exprimer les réels suivants en fonction de $\ln 2$ et $\ln 3$:

1. $\ln 6$
2. $\ln 16$
3. $\ln 24$
4. $\ln 54$
5. $\ln\left(\dfrac{9}{8}\right)$
6. $\ln\sqrt{36}$
7. $\ln\left(\dfrac{4}{27}\right)$
8. $\ln 63 - \ln 7$

Exercice 06 Simplifier les expressions suivantes :

$$\ln(e^5) \qquad \ln\sqrt{e} + \ln\frac{1}{e} \qquad e^{-\ln\frac{1}{3}} \qquad e^{\ln 5 - \ln 2} \qquad e^{5\ln 2} \qquad \frac{e^{\ln 3 - \ln 2}}{e^{\ln 3 + \ln 2}}$$

Exercice 07 Démontrer les égalités suivantes :

1. $\ln\left(\sqrt{7} - \sqrt{3}\right) + \ln\left(\sqrt{7} + \sqrt{3}\right) = 2\ln 2$
2. $\ln\left(\left(3 + \sqrt{5}\right)^2\right) + \ln\left(\left(3 - \sqrt{5}\right)^2\right) = 4\ln 2$
3. $\ln\dfrac{1}{2} + \ln\dfrac{2}{3} + \ln\dfrac{3}{4} + \ldots + \ln\dfrac{49}{50} = -\ln 2 - 2\ln 5$
4. Pour tout réel x : $\quad \ln\left(e^{2x}\right) - \ln\left(2e^x\right) = x - \ln 2$

Exercice 08 Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

1. $\ln(x + 3) + \ln(x + 2) = \ln(x + 11)$
2. $\ln(2x - 1) + \ln(2x + 1) = \ln(x + 2)$

Exercice 09

1. On considère la suite (u_n) définie pour tout entier n par $u_n = 1,01^n$.
   (a) Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.
   (b) Déterminer le plus petit entier n tel que $u_n \geqslant 10^{10}$.
2. On considère la suite (v_n) définie pour tout entier n par $v_n = 2 - 0,3^n$.
   (a) Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n$.
   (b) Déterminer le plus petit entier n tel que $v_n \geqslant 1,99$.

Exercice 10 Soit X une variable aléatoire suivant une loi binomiale de paramètres $n \in \mathbb{N}^*$ et $p = \frac{1}{3}$.

1. Exprimer, en fonction de n, la probabilité $p(X \geqslant 1)$.
2. Résoudre l'inéquation d'inconnue $n \in \mathbb{N}^*$: $p(X \geqslant 1) \geqslant 0,95$.

Étude de la fonction

Exercice 11 Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes :

1. $\ln x > \ln 3$
2. $\ln(x+1) \geqslant \ln 5$
3. $\ln x \leqslant 1$
4. $\ln(x+2) \leqslant 2\ln x$
5. $\ln(x-13) \geqslant 2\ln(x+3)$

Exercice 12 Calculer les limites des fonctions suivantes en 0 et en $+\infty$:

$$f(x) = x - \ln x \qquad g(x) = \sqrt{1+(\ln x)^2} \qquad h(x) = \frac{\ln x}{x^2} \qquad i(x) = \frac{x}{1+\ln x}$$

Exercice 13 Calculer les dérivées des fonctions suivantes, en précisant l'ensemble de dérivabilité :

1. $f(x) = \ln(3x+2)$
2. $f(x) = \ln\left(x^2+1\right)$
3. $f(x) = \ln(e^x + x)$
4. $f(x) = x\ln x$
5. $f(x) = \dfrac{\ln x}{x}$
6. $f(x) = \ln(\ln x)$
7. $f(x) = \ln\left(\dfrac{x}{x^2+1}\right)$
8. $f(x) = \ln\left(\dfrac{x-1}{x+1}\right)$

Exercice 14 Soit f la fonction définie sur $]0\,;+\infty[$ par $f(x) = x\ln(x)$.

1. Calculer $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)$. Interprétation graphique ?
2. Dresser le tableau de variations de f.
3. Étudier la convexité de f.

Exercice 15 Soit f la fonction définie sur $]0\,;+\infty[$ par $f(x) = \dfrac{\ln x}{x}$.

1. Calculer $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)$. Interprétation graphique ?
2. Dresser le tableau de variations de f.
3. **Application 1**

   Discuter l'existence et le nombre de solutions de l'équation $e^{kx} = x$ suivant les valeurs de k.
4. **Application 2**

   On cherche à comparer, pour $n \in \mathbb{N}$, les nombres n^{n+1} et $(n+1)^n$.

   (a) Comparer les nombres dans le cas $n=1$ et $n=2$.

   (b) Démontrer que $n^{n+1} \geqslant (n+1)^n \iff \frac{\ln n}{n} > \frac{\ln(n+1)}{n+1}$.

   (c) Pour tout réel $x > 0$, on pose $f(x) = \frac{\ln x}{x}$. Étudier la fonction f et répondre au problème posé.
5. Étudier la convexité de f.

Exercice 16 Soit f la fonction définie sur $]0\,;+\infty[$ par :

$$f(x) = \frac{\ln x}{x} - x$$

1. Étudier les limites de f en 0 et en $+\infty$. Interpréter graphiquement les résultats.
2. Soit g la fonction définie sur $]0\,;+\infty[$ par $g(x) = -x^2 + 1 - \ln x$.
   Calculer $g(1)$ et étudier les variations et le signe de g.
3. Donner le tableau de variations de f.
4. Étudier la convexité de f.

Exercice 17 Soit f la fonction définie sur $]0\,;+\infty[$ par $f(x) = x^2 - (x+1)\ln x$.

1. Étudier la limite de f en 0 et en $+\infty$.
2. Calculer, pour tout réel x de $]0\,;+\infty[$, $f'(x)$ et $f''(x)$.
3. Étudier les variations de f' sur $]0\,;+\infty[$.
4. Calculer $f'(1)$ et en déduire le signe de $f'(x)$ sur $]0\,;+\infty[$.
5. Déduire des questions précédentes le tableau de variations de f sur $]0\,;+\infty[$.

Exercice 18

1. On considère la fonction u définie sur $]0\,;+\infty[$ par $u(x) = \ln(x) + x - 3$.

   (a) Démontrer que u est strictement croissante sur $]0\,;+\infty[$.

   (b) Démontrer que l'équation $u(x) = 0$ admet une unique solution α comprise entre 2 et 3.

   (c) Déduire des questions précédentes le signe de $u(x)$ sur $]0\,;+\infty[$.
2. Soit f la fonction définie sur $]0\,;+\infty[$ par $f(x) = \left(1 - \dfrac{1}{x}\right)(\ln(x) - 2) + 2$.

   On note $\mathscr{C}$ la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthogonal.

(a) Déterminer la limite de f en 0.

(b) Démontrer que pour tout réel x de $]0\,;+\infty[$, $f'(x) = \dfrac{u(x)}{x^2}$, où u est la fonction de la question 1.
En déduire le sens de variations de f sur $]0\,;+\infty[$.

3. Soit $\mathscr{C}'$ la courbe d'équation $y = \ln(x)$.

(a) Démontrer que pour tout réel x de $]0\,;+\infty[$, $f(x) - \ln(x) = \dfrac{2-\ln(x)}{x}$.

(b) Étudier la position relative de $\mathscr{C}$ et $\mathscr{C}'$.

Exercice 19 Soit $\mathscr{C}$ la courbe représentative de la fonction ln.

1. Donner une équation de la tangente à $\mathscr{C}$ au point d'abscisse a.
2. Démontrer que cette tangente passe par l'origine du repère si et seulement si $a = e$.

Exercice 20 On définit la suite (u_n) pour tout entier naturel $n \geqslant 1$ par $u_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$.

1. Calculer naïvement la limite de (u_n).
2. On pose $v_n = \ln u_n$. Démontrer que (v_n) converge vers 1 et en que (u_n) converge vers une limite à préciser.

Exercices d'approfondissement

Exercice 21 ***Étude d'une fonction***

Soit f la fonction définie par :

$$f(x) = \ln\left(\frac{1-x}{1+x}\right)$$

1. Déterminer l'ensemble de définition de f.
2. Calculer les limites de f aux bornes de son intervalle de définition.
3. Dresser le tableau de variations de f.
4. Déterminer l'équation de la tangente à $\mathscr{C}_f$ en 0.

Exercice 22 ***Logarithme et suites***

Soit (u_n) la suite définie par :

$$\begin{cases} u_0 &= 1 \\ u_{n+1} &= u_n - \ln(u_n^2+1) \end{cases}$$

1. On considère la fonction f définie sur $[0\,;+\infty[$ par :

$$f(x) = x - \ln(x^2+1)$$

(a) Résoudre dans $[0\,;+\infty[$ l'équation $f(x) = x$.

(b) Étudier le sens de variations de f sur $[0\,;1]$.

2. (a) Démontrer par récurrence que pour tout entier n, $0 \leqslant u_n \leqslant 1$.

(b) Étudier le sens de variations de (u_n).

(c) Déduire des questions précédentes que (u_n) est convergente et déterminer sa limite.

Exercice 23 ***Distance minimale***

1. Montrer que l'équation $x^2 + \ln x = 0$ admet une unique solution α sur $\mathbb{R}_+^*$.
En donner une valeur approchée au millième.
2. On se place dans un repère orthonormé du plan, d'origine O.
Quelle est la distance minimale entre O et un point M de la courbe $\mathscr{C}$ d'équation $y = \ln x$?

Exercice 24 ***La totale...***

Dans cet exercice, on considère la fonction f définie sur $]0\,;+\infty[$ par $f(x) = x - \ln(x)$.

1. Dresser le tableau de variations de la fonction f sur $]0\,;+\infty[$.
2. Déterminer le nombre de solutions de l'équation $f(x)=n$, en fonction de $n\in\mathbb{N}$.
3. On admet que, pour entier naturel n non nul, l'équation $f(x)=n$ admet, sur l'intervalle $[1;+\infty[$, une unique solution que l'on note u_n.

   (a) Déterminer la valeur de u_1, et conjecturer graphiquement les valeurs de u_2 et u_3.
   (b) Démontrer que (u_n) est croissante.
   (c) Démontrer que pour tout entier naturel n non nul, $u_n \geqslant n$. Conclusion ?

Exercice 25 ***Fonction réciproque***
Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=\ln(e^x+1)$.

1. Calculer les limites de $f(x)$ en $+\infty$ et $-\infty$.
2. Donner le tableau de variations de f. En déduire que f réalise une bijection de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}_+^*$, c'est à dire que pour tout réel $y\in\mathbb{R}_+^*$, l'équation $f(x)=y$ admet une unique solution $x\in\mathbb{R}$.
3. On pose $y=\ln(e^x+1)$. Exprimer x en fonction de y et en déduire la fonction réciproque de f.

   On notera f^{-1} cette fonction.
4. Étudier la fonction f^{-1} : ensemble de définition, limites, dérivabilité, variations.
5. Représenter les courbes de f et de f^{-1} dans un même repère.

Exercice 26 ***Fonction réciproque (2)***
Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x)=\frac{e^x-e^{-x}}{2}$$

1. Démontrer que f réalise une bijection de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.
2. On pose $y=f(x)$. Exprimer x en fonction de y et en déduire la fonction réciproque de f.