

TRAVAIL EN GROUPE : LOGARITHME NÉPÉRIEN

Sujet A : Logarithme népérien et suite

On considère la fonction f définie sur $[0; +\infty[$ par :

$$f(x) = \ln \left(\frac{3x+1}{x+1} \right)$$

On admet que la fonction f est dérivable sur $[0; +\infty[$ et on note f' sa fonction dérivée.

On note \mathcal{C}_f la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthogonal.

Partie A : étude de la fonction f

1. Déterminer $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ et en donner une interprétation graphique.
2. (a) Démontrer que pour tout réel $x \in [0; +\infty[$:

$$f'(x) = \frac{2}{(x+1)(3x+1)}$$

- (b) En déduire que f est strictement croissante sur $[0; +\infty[$.

Partie B : étude d'une suite

Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 3$, et pour tout entier naturel n : $u_{n+1} = f(u_n)$

1. Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n : $\frac{1}{2} \leq u_{n+1} \leq u_n$.
2. En déduire que la suite (u_n) converge vers une limite strictement positive.
3. La fonction Python `calcul(n)`, définie ci-dessous, permet de déterminer une valeur approchée de u_n .

```

1  from math import log # Fonction logarithme népérien
2
3  def f(x):
4      return log((3*x+1) / (x+1))
5
6  def calcul(n):
7      u = .....
8
9      for i in range(n):
10         u = .....
11
12     return u

```

Recopier et compléter les lignes 7 et 10 de ce programme.

4. On note ℓ la limite de (u_n) . Justifier que $\ell = f(\ell)$.

Partie C : détermination de ℓ

L'objectif de cette partie est de déterminer une valeur approchée de ℓ .

On introduit pour cela la fonction g définie sur $[0; +\infty[$ par $g(x) = f(x) - x$.

1. Dresser le tableau de variations de g sur $[0; +\infty[$.
2. Démontrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution strictement positive, notée α .
3. En déduire une valeur approchée à 0,01 près de la limite ℓ de la suite (u_n) .

TRAVAIL EN GROUPE : LOGARITHME NÉPÉRIEN

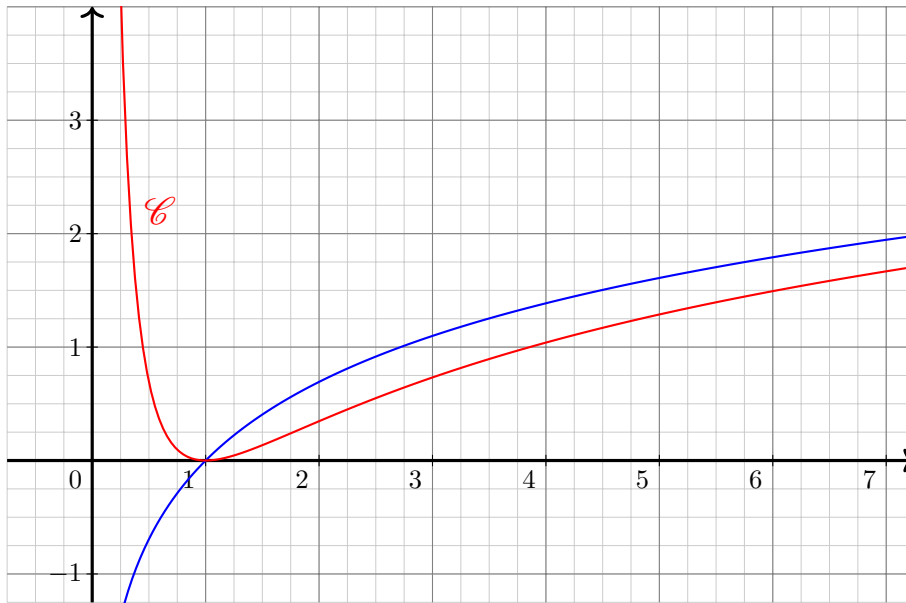
Sujet B : Deux fonctions auxiliaires

Le plan est rapporté à un repère orthonormé.

Soit f la fonction définie sur $]0; +\infty[$ par :

$$f(x) = \left(1 - \frac{1}{x}\right) \ln(x)$$

Soit \mathcal{C} la courbe représentative de f et Γ la courbe représentative d'équation $y = \ln(x)$ dans le repère ci-dessous.



Partie A : Conjectures graphiques

Dans chacune des questions de cette partie, aucune explication n'est demandée.

1. Conjecturer graphiquement les solutions de l'équation $f(x) = 1$ sur $]0; +\infty[$.
2. Conjecturer graphiquement les solutions de l'équation $f'(x) = 0$ sur $]0; +\infty[$.
3. Conjecturer graphiquement les solutions de l'inéquation $f(x) \geq \ln(x)$ sur $]0; +\infty[$.

Partie B : Étude de fonctions auxiliaires

1. On considère la fonction g définie sur $]0; +\infty[$ par $g(x) = x + \ln(x) - 1$.
 - (a) Démontrer que g est croissante sur $]0; +\infty[$.
 - (b) Calculer $g(1)$ et en déduire le signe du réel $g(x)$ selon les valeurs de x .
2. On considère la fonction h définie sur $]0; +\infty[$ par $h(x) = x + 2 \ln(x) - 3$.
 - (a) Déterminer les limites de h en 0 et en $+\infty$.
 - (b) Dresser le tableau de variations de h sur $]0; +\infty[$.

- (c) Démontrer que l'équation $h(x) = 0$ admet une unique solution sur $]0; +\infty[$, notée α .
En donner un encadrement par deux entiers consécutifs.
- (d) Dédire des questions précédentes le signe du réel $h(x)$ suivant les valeurs de x .
- (e) La fonction Python `encadrement` doit permettre de déterminer un encadrement de α à 10^{-2} près.

```
1  from math import log # fonction logarithme népérien
2
3  def h(x):
4      return x + 2*log(x) - 3
5
6  def encadrement():
7      alpha = 1
8
9      while ..... :
10         alpha = alpha + 0.01
11
12         return alpha - 0.01, alpha
```

Recopier et compléter la ligne 9 ce programme.

Partie C : Étude de \mathcal{C}

1. Déterminer les limites de f en 0 et en $+\infty$.

Dans la suite, on admet que f est deux fois dérivable sur $]0; +\infty[$.

2. Démontrer que pour tout réel $x > 0$, $f'(x) = \frac{g(x)}{x^2}$, où g est la fonction définie précédemment, et que la courbe \mathcal{C} passe par un minimum.
3. Exprimer $f''(x)$ en fonction de $h(x)$, puis démontrer que \mathcal{C} admet un unique point d'inflexion.

Partie D : Positions relatives de \mathcal{C} et Γ

On pose, pour tout réel $x > 0$, $d(x) = f(x) - \ln(x)$.

1. Étudier le signe de $d(x)$ sur $]0; +\infty[$. En déduire la position relative des courbes \mathcal{C} et Γ .
2. Calculer la limite de d en $+\infty$. Donner une interprétation graphique de ce résultat.

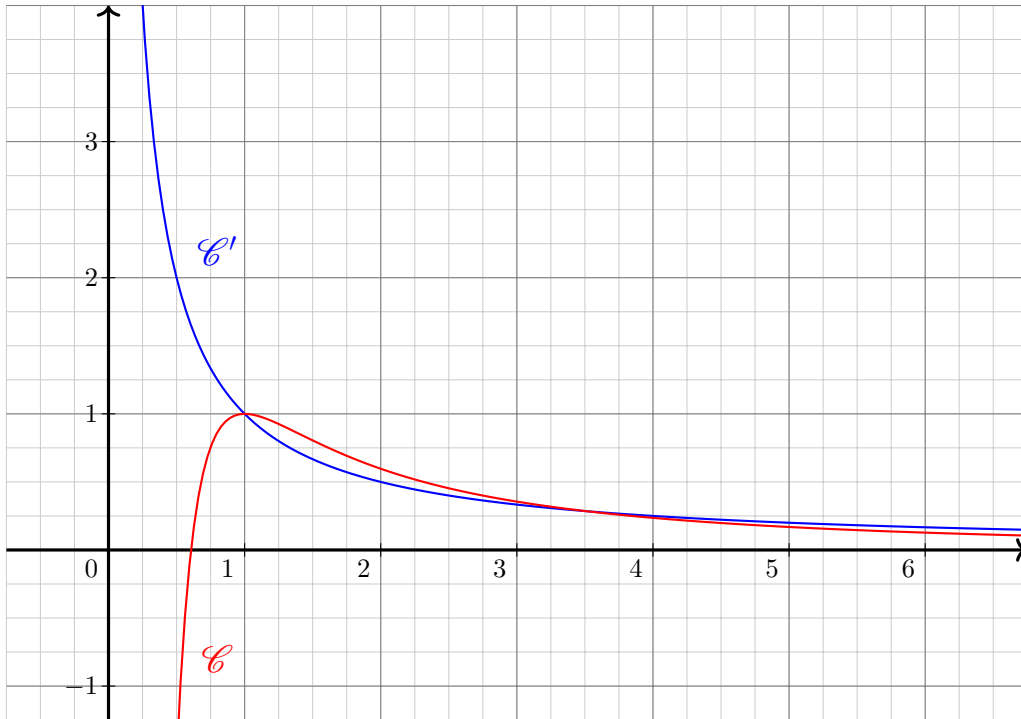
TRAVAIL EN GROUPE : LOGARITHME NÉPÉRIEN

Sujet C : Suite implicite

Le plan est rapporté à un repère orthonormé.

Soit f la fonction définie sur $]0; +\infty[$ par $f(x) = \frac{1 + 2 \ln(x)}{x^2}$.

Soit \mathcal{C} la courbe représentative de f et \mathcal{C}' la courbe représentative d'équation $y = \frac{1}{x}$ dans le repère ci-dessous.



Partie A : Conjectures graphiques

Dans chacune des questions de cette partie, aucune explication n'est demandée.

1. Conjecturer graphiquement une solution de l'équation $f(x) = 0$ sur $]0; +\infty[$.
2. Conjecturer graphiquement deux solutions de l'équation $f(x) = \frac{1}{x}$ sur $]0; +\infty[$.
3. Conjecturer graphiquement une solution de l'équation $f'(x) = 0$ sur $]0; +\infty[$.

Partie B : Étude de la courbe \mathcal{C}

1. Montrer que la courbe \mathcal{C} admet exactement deux asymptotes.
2. On admet que f est dérivable sur $]0; +\infty[$. Démontrer que pour tout réel $x > 0$, $f'(x) = -\frac{4 \ln(x)}{x^3}$ et que la courbe \mathcal{C} passe par un maximum.
3. Déterminer les coordonnées du point d'intersection de la courbe \mathcal{C} avec l'axe des abscisses.
4. Vérifier que pour tout réel $x > 0$, $f(x) - \frac{1}{x} = \frac{1 - x + 2 \ln(x)}{x^2}$.

5. Pour tout réel $x > 0$, on pose $g(x) = 1 - x + 2 \ln(x)$.
- Étudier le sens de variation de g ainsi que ses limites en 0 et en $+\infty$.
 - À l'aide du tableau de variation de g , résoudre sur $]0; +\infty[$ l'équation $g(x) = 0$, et donner un encadrement d'amplitude 10^{-2} de la solution $\alpha \in]2; +\infty[$.
 - Déterminer selon le réel $x > 0$ le signe du réel $g(x)$ et en déduire la position relative de \mathcal{C} et \mathcal{C}' .
6. Démontrer que la courbe \mathcal{C} admet un point d'inflexion dont on déterminera les coordonnées.

Partie C : Étude d'une suite

Pour chaque entier naturel n non nul, on considère sur $]0; +\infty[$ l'équation $f(x) = \frac{1}{n}$.

On admet que sur $]1; +\infty[$, cette équation admet une unique solution notée u_n .

- Déterminer u_1 , et à l'aide de la calculatrice, donner u_2 et u_3 à 0,1 près.
- Démontrer que la suite (u_n) est croissante.
- On considère le programme Python suivant, contenant la fonction `termes(n)` dont le rôle est de déterminer la liste des n premiers termes de la suite (u_n) , à 10^{-3} près.

```

1  from math import log # Fonction logarithme népérien
2
3  def f(x):
4      return (1 + 2*log(x)) / x**2
5
6  def termes(n):
7      x = 1
8      liste = []
9
10     for i in range(1,n+1):
11
12         while ..... :
13             x = x + 0.001
14
15         liste.append(x)
16
17     return liste

```

Recopier et compléter la ligne 12 de ce programme.

- Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $f(u_n) \geq \frac{1}{(u_n)^2}$. En déduire que $u_n \geq \sqrt{n}$, puis que (u_n) est divergente.