# Chapitre 12 : Géométrie dans l'Espace

## Table des matières



## Notions au programme

- Vecteurs de l'espace
- Combinaisons linéaires de vecteurs de l'espace
- Droites et plans de l'espace, caractérisations vectorielles
- Bases et repères de l'espace
- Représentation paramétrique d'une droite

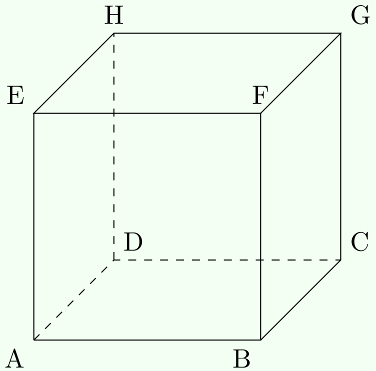
# I Droites et plans de l'espace

Avant de s'attaquer aux nouveautés, rappelons quelques principes de base en géométrie dans l'espace :

- Par deux points distincts de l'espace passe une unique droite.
- Par trois points non alignés passe un unique plan.
- Si un plan contient deux points distincts $A$ et $B$, alors il contient la droite $(AB)$.
- Les résultats de géométrie plane (parallélisme, théorèmes de Pythagore, de Thalès, inégalités triangulaires...) s'appliquent dans chaque plan de l'espace.

**Exercice 1**

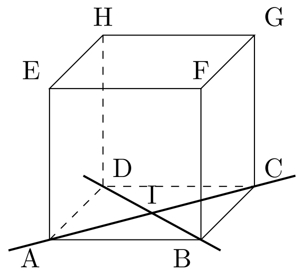
On considère un cube $ABCDEFGH$ de côté 2.



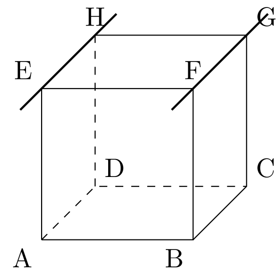

1. Donner un point appartenant au plan (ADH), autre que A, D ou H.
2. Donner un point appartenant au plan (ECA), autre que E, C ou A.
3. Calculer la longueur $FC$.

## Positions relatives de deux droites

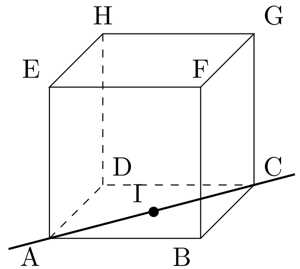
**Deux droites de l'espace sont soit coplanaires (il existe un plan les contenant toutes les deux), soit non coplanaires. Si elles sont coplanaires, alors elles sont soit parallèles, soit sécantes.**



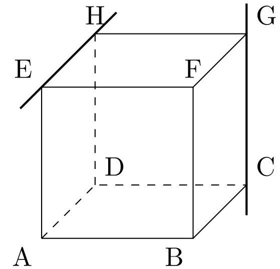

Les droites $(AC)$ et $(DB)$ sont **sécantes** en $I$.




Les droites $(EH)$ et $(FG)$ sont **strictement parallèles**.



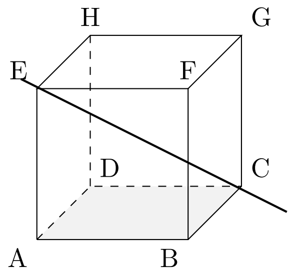

Les droites $(AI)$ et $(AC)$ sont **confondues**.



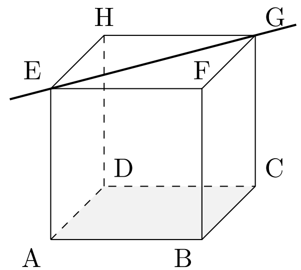

Les droites $(EH)$ et $(GC)$ sont **non coplanaires**.

## Positions relatives d'un plan et d'une droite

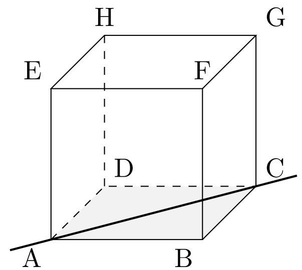
**Une droite et un plan de l'espace sont soit sécants, soit parallèles.**




La droite $(EC)$ et le plan $(ABC)$ sont **sécants** en $C$.



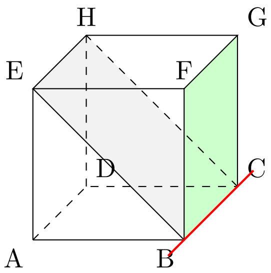

La droite $(EG)$ et le plan $(ABC)$ sont **strictement parallèles**.



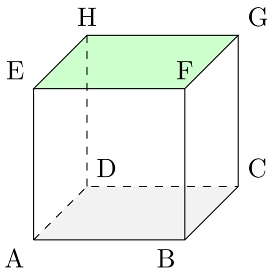

La droite $(AC)$ est **contenue** dans le plan $(ABC)$.

### Positions relatives de deux plans

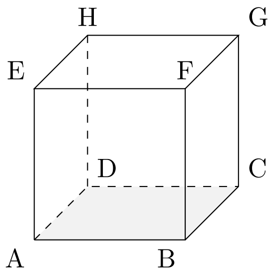
**Deux plans de l'espace sont soit sécants suivant une droite, soit parallèles.**




$(EBC)$ et $(FBC)$ sont **sécants** suivant $(BC)$.




$(ABC)$ et $(EFG)$ sont **strictement parallèles**.



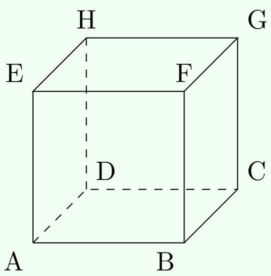

$(ABC)$ et $(ABD)$ sont **confondus**.

**Propriété 1.**

1. *Deux droites parallèles à une même droite sont parallèles entre elles.*
2. *Une droite est parallèle à un plan si et seulement si elle est parallèle à une droite de ce plan.*
3. *Deux plans parallèles à un même plan sont parallèles entre eux.*
4. *Deux plans sont parallèles si et seulement si deux droites sécantes de l'un sont parallèles à deux droites sécantes de l'autre.*

**Exercice 2**

On considère le cube ABCDEFGH ci-dessous :




1. Justifier que (AD) // (FG).
2. Justifier que (AB) // (DCG).
3. Justifier que (EDH) // (BCG).

# II Vecteurs de l'espace

## II.1 Notion de vecteur de l'espace

On étend à l'espace la notion de vecteur déjà vue dans le plan. On retrouve ainsi les différentes définitions et propriétés :

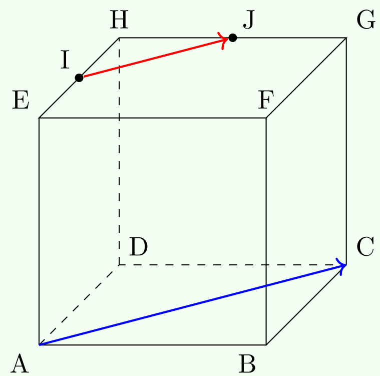
- Deux vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont égaux si et seulement si $ABDC$ est un parallélogramme (éventuellement aplati)
- Addition de deux vecteurs
- Multiplication d'un vecteur par un réel
- Relation de Chasles
- Propriétés algébriques : pour tous vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ et pour tous réels $k$ et $k'$ :

$$k(k'\overrightarrow{u}) = kk'\overrightarrow{u} \qquad (k+k')\overrightarrow{u} = k\overrightarrow{u} + k'\overrightarrow{u} \qquad k(\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v}) = k\overrightarrow{u} + k\overrightarrow{v}$$

- Colinéarité de deux vecteurs et caractérisation géométrique du parallélisme de deux droites et de l'alignement de trois points

**Exercice 3**

Dans un cube ABCDEFGH, on considère les points I et J milieux respectifs de [EH] et [HG]. Montrer que (IJ) // (AC).




$$\overrightarrow{IJ} = \overrightarrow{IH} + \overrightarrow{HJ} = \frac{1}{2}\overrightarrow{EH} + \frac{1}{2}\overrightarrow{HG} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{EH} + \overrightarrow{HG}\right) = \frac{1}{2}\overrightarrow{EG} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$$

Ainsi, $\overrightarrow{IJ}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont colinéaires, donc les droites (IJ) et (AC) sont parallèles.

## II.2 Vecteurs coplanaires

Avec la troisième dimension arrive une nouvelle notion : la **coplanarité**.

**Définition 2.**

- *Des points sont dits **coplanaires** s'ils sont tous situés dans un même plan.*
- *Des vecteurs sont dits **coplanaires** si en traçant leurs représentants à partir d'un même point $M$ quelconque, leurs extrémités et $M$ sont coplanaires.*

**Propriété 3.** *Soient $A$,$B$,$C$ et $D$ des points de l'espace. Alors :*

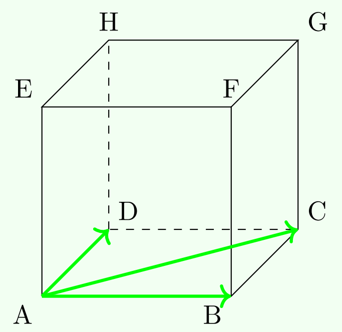
*$A$,$B$,$C$ et $D$ sont coplanaires **si et seulement si** $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{AD}$ sont coplanaires.*

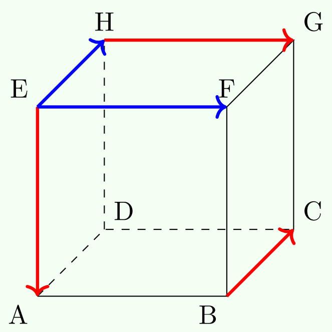
**Remarque.**

- Trois points sont toujours coplanaires
- Deux vecteurs sont toujours coplanaires
- Si deux vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont colinéaires, alors pour tout vecteur $\overrightarrow{w}$, les vecteurs $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ et $\overrightarrow{w}$ sont coplanaires.

**Exercice 4**

Dans le cube ci-dessous :




- $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{AD}$ sont coplanaires, car les points A,B,C et D sont coplanaires.
- $\overrightarrow{EA}$, $\overrightarrow{HG}$ et $\overrightarrow{BC}$ ne sont pas coplanaires : représentés à partir du point E, les extrémités de leurs représentants (les points F, A, H) et le point E ne sont clairement pas coplanaires.

## II.3 Combinaison linéaire de vecteurs de l'espace

**Définition 4.** *Soient $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ deux vecteurs de l'espace.*
*On dit qu'un vecteur $\overrightarrow{w}$ est **combinaison linéaire** de $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ s'il existe deux réels $\alpha$ et $\beta$ tels que $\overrightarrow{w} = \alpha\overrightarrow{u} + \beta\overrightarrow{v}$.*

**Propriété 5.** *Soient $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ et $\overrightarrow{w}$ trois vecteurs de l'espace, avec $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ non colinéaires.*
*Les vecteurs $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ et $\overrightarrow{w}$ sont coplanaires si et seulement si il existe deux réels $\alpha$ et $\beta$ tels que $\overrightarrow{w} = \alpha\overrightarrow{u} + \beta\overrightarrow{v}$.*

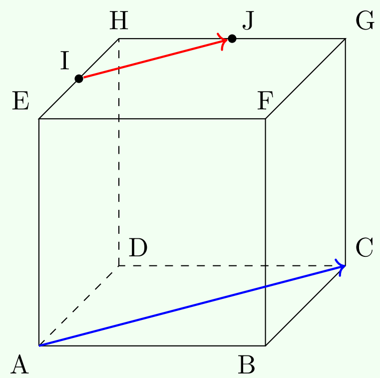
**Démonstration.** *Soient $A$,$B$,$C$ et $D$ quatre points de l'espace tels que $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{v}$ et $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{w}$. Comme $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ ne sont pas colinéaires, alors $(A; \overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AC})$ est un repère du plan $(ABC)$. Dans ce cas, tout point $M$ du plan $(ABC)$ possède deux coordonnées $x$ et $y$ définies par l'égalité vectorielle $\overrightarrow{AM} = x\overrightarrow{AB} + y\overrightarrow{AC}$. Ainsi :*

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v} \text{ et } \overrightarrow{w} \text{ coplanaires} &\iff A,B,C,D \text{ coplanaires} \\
&\iff D \in (ABC) \\
&\iff \text{il existe deux réels } \alpha \text{ et } \beta \text{ tels que } \overrightarrow{AD} = \alpha\overrightarrow{AB} + \beta\overrightarrow{AC} \\
&\iff \text{il existe deux réels } \alpha \text{ et } \beta \text{ tels que } \overrightarrow{w} = \alpha\overrightarrow{u} + \beta\overrightarrow{v}
\end{aligned}$$

$\square$

**Exercice 5**

Dans l'exercice précédent, où l'on considérait un cube ABCDEFGH et les points I et J milieux respectifs de [EH] et [HG], on a montré que $\overrightarrow{IJ} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$.

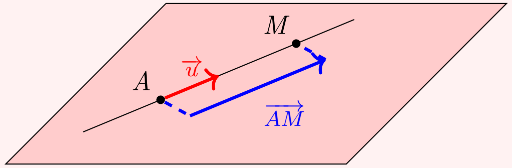



1. Démontrer que $\overrightarrow{AC} = -2\overrightarrow{AI} + 2\overrightarrow{AJ}$.
2. Que peut-on en déduire sur les points A, C, I et J ?

## II.4 Caractérisation vectorielle d'une droite de l'espace

**Propriété 6.** *Soient $A$ un point de l'espace $\mathscr{E}$, et $\overrightarrow{u}$ un vecteur non nul.*
*La droite $(d)$ passant par $A$ et de vecteur directeur $\overrightarrow{u}$ est l'ensemble des points $M$ de l'espace tels que $\overrightarrow{AM}$ est colinéaire à $\overrightarrow{u}$ :*

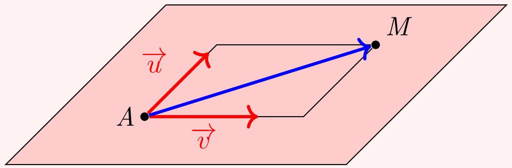
$$(d) = \left\{ M \in \mathscr{E} \ / \ \overrightarrow{AM} = t\,\overrightarrow{u},\ t \in \mathbb{R} \right\}$$




## II.5 Caractérisation vectorielle d'un plan de l'espace

**Propriété 7.** *Soient $A$ un point de l'espace $\mathscr{E}$, $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ deux vecteurs non nuls et non colinéaires.*
*Le plan $(P)$ passant par $A$ et dirigé par les vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ est l'ensemble des points $M$ de l'espace tels que $\overrightarrow{AM}$, $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont coplanaires :*

$$(P) = \left\{ M \in \mathscr{E} \ / \ \overrightarrow{AM} = t\,\overrightarrow{u} + t'\overrightarrow{v},\ (t,t') \in \mathbb{R}^2 \right\}$$




# III Bases et Repères

## III.1 Bases de l'Espace

**Définition 8.** *Un triplet de vecteurs $\left(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k}\right)$* ***non coplanaires*** *forme une* ***base de l'espace****.*

**Propriété 9.** *Soit $\left(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k}\right)$ une base de l'espace. Soit $\overrightarrow{u}$ un vecteur de l'espace.*
*Il existe un unique triplet $(x;y;z) \in \mathbb{R}^3$ tel que :*

$$\overrightarrow{u} = x\,\overrightarrow{i} + y\,\overrightarrow{j} + z\,\overrightarrow{k}$$

*Dans ce cas, on dit que le vecteur $\overrightarrow{u}$ a pour coordonnées $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ dans la base $\left(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k}\right)$.*

**Exercice 6**

Dans un cube $ABCDEFGH$, donner les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AG}$ dans la base $\left(\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AD}; \overrightarrow{AE}\right)$, puis dans la base $\left(\overrightarrow{DA}; \overrightarrow{DC}; \overrightarrow{DH}\right)$.

**Propriété 10.** *Dans une base $\left(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k}\right)$ de l'espace :*

- *Si $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{v}\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$, et $k \in \mathbb{R}$, alors :*

$$\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}\begin{pmatrix} x+x' \\ y+y' \\ z+z' \end{pmatrix} \qquad k\overrightarrow{u}\begin{pmatrix} kx \\ ky \\ kz \end{pmatrix}$$

- *Deux vecteurs sont colinéaires si et seulement si leurs coordonnées sont proportionnelles*

**Exercice 7**

Démontrer que les vecteurs $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{v}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{w}\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$ sont coplanaires.

**Exercice 8**

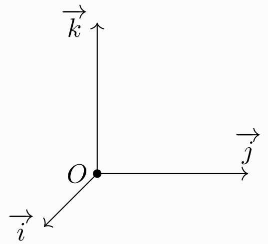
Dans une base $\left(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k}\right)$, on considère les vecteurs $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$, $\overrightarrow{v}\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{w}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$.

Montrer que les vecteurs $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ et $\overrightarrow{w}$ forment une base de l'espace.

## III.2 Repères de l'espace

**Définition 11.** *Un repère $(O; \overrightarrow{i}; \overrightarrow{j}; \overrightarrow{k})$ de l'espace est formé par :*

- *un point d'origine $O$*
- *une base $(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k})$ de l'espace*




**Propriété 12.** *Soit $(O; \overrightarrow{i}; \overrightarrow{j}; \overrightarrow{k})$ un repère de l'espace.*
*Pour tout point $M$ de l'espace, il existe un unique triplet $(x; y; z) \in \mathbb{R}^3$ tel que :*

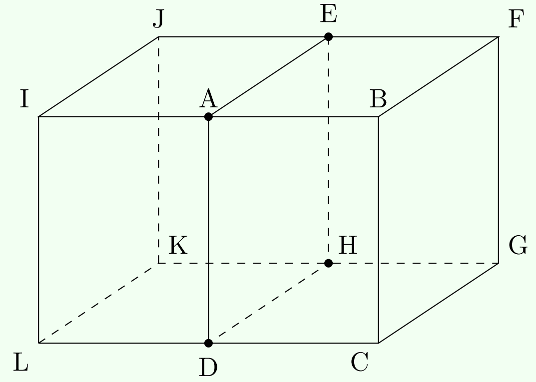
$$\overrightarrow{OM} = x\overrightarrow{i} + y\overrightarrow{j} + z\overrightarrow{k}$$

*On note alors $M(x\ ;\ y\ ;\ z)$, où $x$, $y$, $z$ sont les* ***coordonnées*** *du point $M$.*
*$x$ est l'**abscisse**, $y$ l'**ordonnée** et $z$ est appelé la **côte**.*

☞ *Dessin 3D d'un point M de coordonnées (1 ;2 ;3)*

**Exercice 9**

Donner les coordonnées de chaque point nommé dans le repère $(A; \overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AD}; \overrightarrow{AE})$.




A,E,H,D milieux respectifs
de [IB], [JF], [KG] et [LC]

**Propriété 13.** *Dans un repère de l'espace, on considère les points $A(x_A\ ;\ y_a\ ;\ z_A)$ et $B(x_B\ ;\ y_B\ ;\ z_B)$. Alors :*

- *Le vecteur $\overrightarrow{AB}$ a pour coordonnées :*

$$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}x_B - x_A\\ y_B - y_A\\ z_B - z_A\end{pmatrix}$$

- *Le milieu $I$ de $[AB]$ a pour coordonnées :*

$$I\left(\frac{x_A + x_B}{2}\ ;\ \frac{y_A + y_B}{2}\ ;\ \frac{z_A + z_B}{2}\right)$$

**Exercice 10**

Dans un repère de l'espace, on considère les points $A(1; 3; 4)$, $B(2; -1; -4)$, $C(3; 0; -1)$ et $D(-2; 5; 6)$. Montrer que (AC) // (BD).

# IV Représentation paramétrique d'une droite

**Propriété 14.** *Dans un repère de l'espace, la droite $(d)$ passant par $A(x_0\ ;\ y_0\ ;\ z_0)$ et de vecteur directeur $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix}\alpha\\\beta\\\gamma\end{pmatrix}$ non nul est l'ensemble des points $M(x;y;z)$ de l'espace vérifiant :*

$$\left\{\begin{array}{rcl} x &=& x_0+\alpha t\\ y &=& y_0+\beta t\\ z &=& z_0+\gamma t\end{array}\right. \quad , \quad t\in\mathbb{R}$$

*Ces équations forment la* ***représentation paramétrique de la droite*** *$(d)$.*

**Exercice 11**

Donner une représentation paramétrique de la droite $d$ passant par $A(1;2;0)$ et de vecteur directeur $(2;-1;1)$.
Donner un point de $(d)$ différent de $A$.
Le point $O(0;0;0)$ appartient-il à $d$ ?

**Propriété 15.** *(Rappels)*

- *Deux droites sont parallèles si elle admettent des vecteurs directeurs colinéaires.*
- *Deux droites sont confondues si elles sont parallèles et ont (au moins) un point commun.*

**Exemple.** Démontrer que les droites $\mathscr{D}$ et $\mathscr{D}'$ de représentations paramétriques suivantes sont **confondues** :

$$\mathscr{D}:\left\{\begin{array}{rcl} x &=& -1+5t\\ y &=& -3-t\\ z &=& -4t\end{array}\right. \quad , \quad t\in\mathbb{R} \qquad \mathscr{D}':\left\{\begin{array}{rcl} x &=& 9+15t'\\ y &=& -5-3t'\\ z &=& -8-12t'\end{array}\right. \quad , \quad t'\in\mathbb{R}$$

**Exemple.** Démontrer que les droites $\mathscr{D}$ et $\mathscr{D}'$ de représentations paramétriques suivantes sont **strictement parallèles** :

$$\mathscr{D}:\left\{\begin{array}{rcl} x &=& -3+4t\\ y &=& 4t\\ z &=& 1+12t\end{array}\right. \quad , \quad t\in\mathbb{R} \qquad \mathscr{D}':\left\{\begin{array}{rcl} x &=& -1+t'\\ y &=& 2+t'\\ z &=& 5+3t'\end{array}\right. \quad , \quad t'\in\mathbb{R}$$

**Exemple.** Démontrer que les droites $\mathscr{D}$ et $\mathscr{D}'$ de représentations paramétriques suivantes sont **sécantes**, et préciser les coordonnées de leur point d'intersection :

$$\mathscr{D}:\left\{\begin{array}{rcl} x &=& -3+t\\ y &=& 2-t\\ z &=& 1+t\end{array}\right. \quad , \quad t\in\mathbb{R} \qquad \mathscr{D}':\left\{\begin{array}{rcl} x &=& t'\\ y &=& 1+t'\\ z &=& -1-4t'\end{array}\right. \quad , \quad t'\in\mathbb{R}$$

**Propriété 16.** *Deux droites sont non coplanaires si elles ne sont ni sécantes, ni parallèles.*

**Exemple.** Démontrer que les droites $\mathscr{D}$ et $\mathscr{D}'$ de représentations paramétriques suivantes sont **non coplanaires** :

$$\mathscr{D}:\left\{\begin{array}{rcl} x &=& -3+t\\ y &=& t\\ z &=& 1+3t\end{array}\right. \quad , \quad t\in\mathbb{R}\in\mathbb{R} \qquad \mathscr{D}':\left\{\begin{array}{rcl} x &=& -1+t'\\ y &=& 2-2t'\\ z &=& 5+3t'\end{array}\right. \quad , \quad t'\in\mathbb{R}\in\mathbb{R}$$