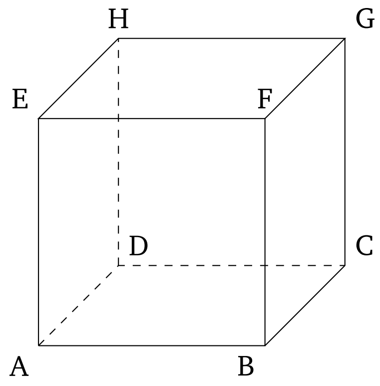
Exercices de Cours : Géométrie dans l'Espace

I) Droites et plans de l'espace

Exercice 01 On considère un cube $ABCDEFGH$ de côté 2.



1. Donner un point appartenant au plan (ADH), autre que A, D ou H.
2. Donner un point appartenant au plan (ECA), autre que E, C ou A.
3. Calculer la longueur FC.

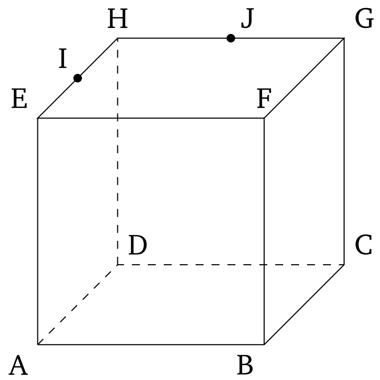
Exercice 02 On considère le cube $ABCDEFGH$ de l'exercice ci-dessus.

1. Justifier que (AD) // (FG).
2. Justifier que (AB) // (DCG).
3. Justifier que (EDH) // (BCG).

II) Vecteurs de l'espace

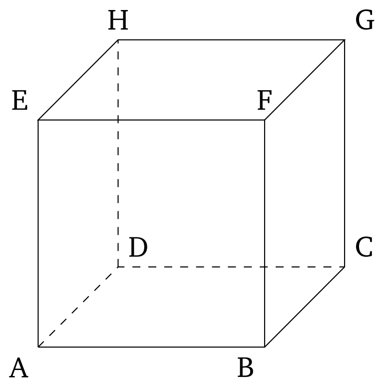
1°) Notion de vecteur de l'espace

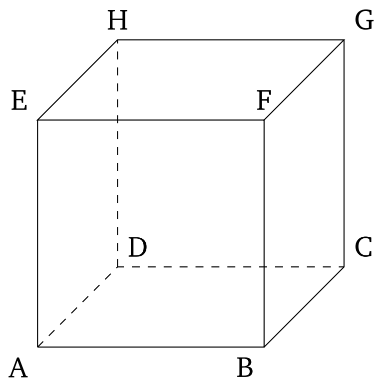
Exercice 03 Dans un cube ABCDEFGH, on considère les points I et J milieux respectifs de [EH] et [HG]. Montrer que $\overrightarrow{IJ} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$, et en déduire que (IJ) // (AC).



2°) Vecteurs coplanaires

Exercice 04 Dans chaque cas, ABCDEFGH est un cube. Cocher la bonne réponse et justifier :



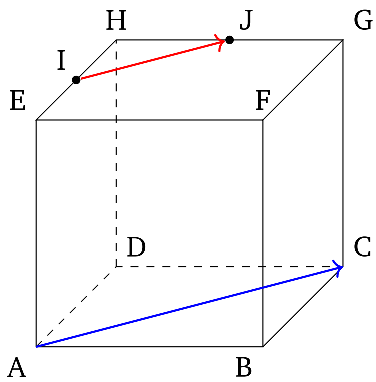


$\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{AD}$:
- ☐ sont coplanaires
- ☐ ne sont pas coplanaires

$\overrightarrow{EA}, \overrightarrow{HG}$ et $\overrightarrow{BC}$:
- ☐ sont coplanaires
- ☐ ne sont pas coplanaires

3°) Combinaison linéaire de vecteurs de l'espace

Exercice 05 Dans l'exercice 03, où l'on considérait un cube ABCDEFGH et les points I et J milieux respectifs de [EH] et [HG], on a montré que $\overrightarrow{IJ} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$.



1. Démontrer que $\overrightarrow{AC} = -2\overrightarrow{AI} + 2\overrightarrow{AJ}$.

2. Que peut-on en déduire sur les points A, C, I et J ?

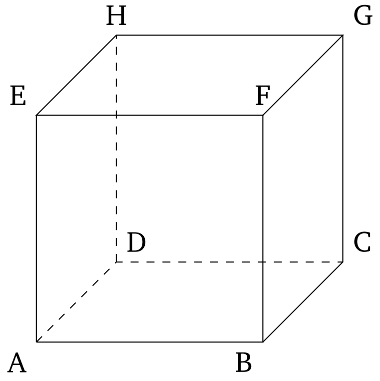
4°) Caractérisation vectorielle d'une droite de l'espace

5°) Caractérisation vectorielle d'un plan de l'espace

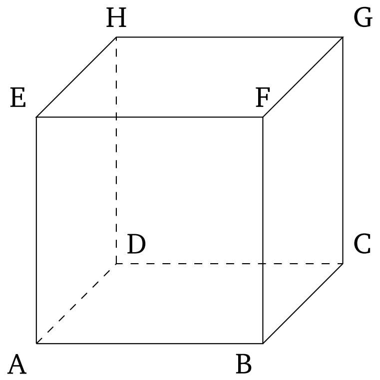
II) Bases et Repères

1°) Bases de l'Espace

Exercice 06 Donner les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AG}$ dans chacune des bases suivantes :



Base $\left(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AD};\overrightarrow{AE}\right)$:



Base $\left(\overrightarrow{DA};\overrightarrow{DC};\overrightarrow{DH}\right)$:

Exercice 07 Dans une base $\left(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k}\right)$, on considère les vecteurs $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$, $\overrightarrow{v}\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{w}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$.

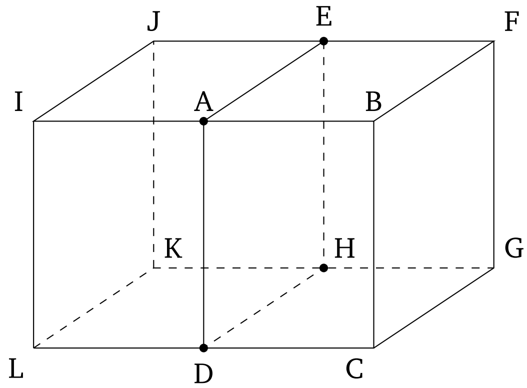
Montrer que les vecteurs $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ et $\overrightarrow{w}$ forment une base de l'espace.

Exercice 08 Dans une base $\left(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right)$, on considère les vecteurs $\vec{u}\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\vec{v}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ et $\vec{w}\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$.

Montrer que les vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont coplanaires.

2°) Repères de l'Espace

Exercice 09 Donner les coordonnées de chaque point nommé dans le repère $(A; \overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AD}; \overrightarrow{AE})$.



A,E,H,D milieux respectifs
de [IB], [JF], [KG] et [LC]

Exercice 10 Dans un repère de l'espace, on considère les points $A(1;3;4)$, $B(2;-1;-4)$, $C(3;0;-1)$ et $D(-2;5;6)$. Montrer que (AC) // (BD).

IV) Représentation paramétrique d'une droite, d'un plan

Exercice 11 Soit d la droite passant par A(1 ;2 ;0) et de vecteur directeur $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

1. Donner une représentation paramétrique de la droite d.

2. Donner les coordonnées d'un point de d, différent de A.

3. Le point O(0 ;0 ;0) appartient-il à d ?