

Une fonction trigonométrique est une fonction dont la variable est une mesure d'angle. Dans ce chapitre, nous allons nous intéresser particulièrement à deux d'entre elles - les plus connues - qui sont les fonctions **cosinus** et **sinus**. Une partie importante de ce chapitre est un ensemble de rappels de Première.

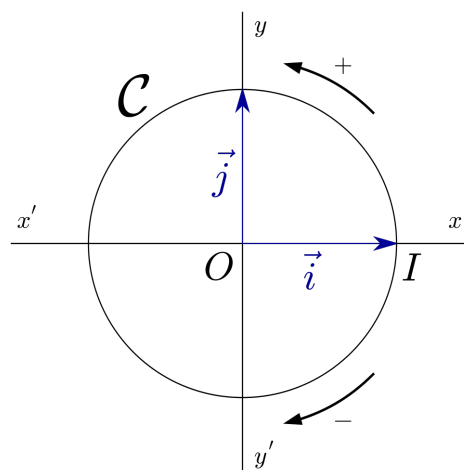
12.1 Cercle trigonométrique (rappels)

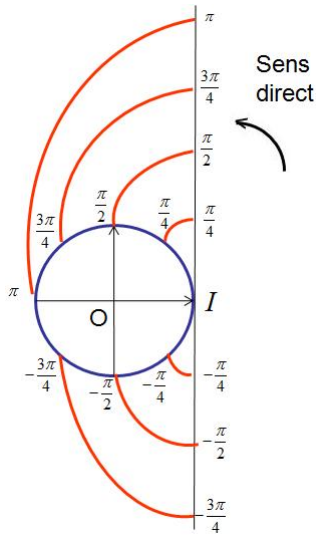
12.1.1 Enroulement de la droite numérique

Définition. On munit le plan d'un repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j})$ avec $\vec{i} = \overrightarrow{OI}$ et $\vec{j} = \overrightarrow{OJ}$.

Le **cercle trigonométrique** est le cercle \mathcal{C} de centre O et de rayon 1, sur lequel on choisit une **orientation** :

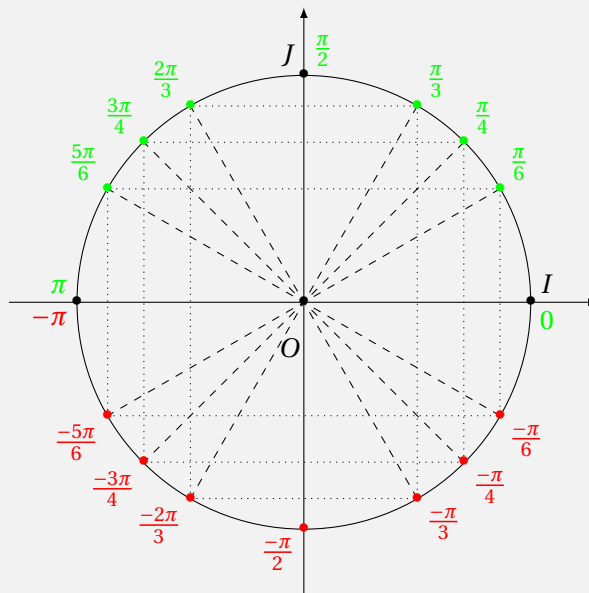
- le sens **direct** (ou sens *positif* ou sens *trigonométrique*) : c'est le sens contraire au sens de rotation des aiguilles d'une montre
- le sens **indirect** (ou sens *négatif*) : c'est le sens de rotation des aiguilles d'une montre





Propriété. À tout nombre réel x , on associe un unique point M sur le cercle trigonométrique de la manière suivante : on “enroule” autour du cercle un axe orienté, gradué, d’origine I . Le point de l’axe d’abscisse x se superpose alors à un unique point M du cercle.

Propriété. Valeurs remarquables



☞ Vert : Sens + ☞ Rouge : Sens -

Propriété.

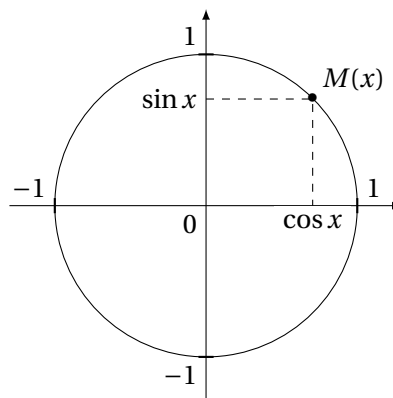
- Si x est un nombre réel et M le point du cercle trigonométrique associé à x , alors M est associé à tous les nombres réels de la forme $x + k \times 2\pi$, où $k \in \mathbb{Z}$.
- Si x et x' désignent deux nombres réels tels que $x - x' = k \times 2\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, alors x et x' sont associés au même point du cercle trigonométrique.

12.2 Cosinus et sinus d'un nombre réel

12.2.1 Définition et valeurs remarquables

Définition. Soit x un nombre réel, et soit $M(x_M; y_M)$ son image sur le cercle trigonométrique. On définit le cosinus et le sinus du nombre x en posant :

$$\cos x = x_M \quad \sin x = y_M$$



Propriété. Pour tout nombre réel x , on a :

$$-1 \leq \cos x \leq 1 \quad -1 \leq \sin x \leq 1 \quad (\cos x)^2 + (\sin x)^2 = 1$$

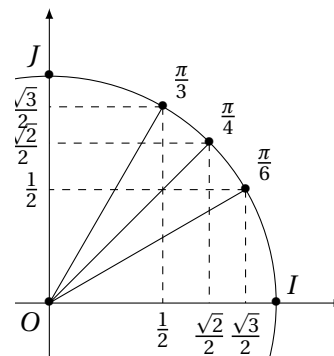
☞ On note $(\cos x)^2 = \cos^2 x$ et $(\sin x)^2 = \sin^2 x$, de sorte que l'égalité précédente s'écrit : $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$

Propriété. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, et pour tout $k \in \mathbb{Z}$:

$$\cos(x + 2k\pi) = \cos x \quad \sin(x + 2k\pi) = \sin x$$

Propriété. Valeurs remarquables de cos et sin

Nombre x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
Angle associé	0°	30°	45°	60°	90°
$\cos x$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\sin x$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1



☞ Tableau à connaître par coeur!!

12.2.2 Angles associés

Propriété. Pour tout réel x , on a :

$$\cos(-x) = \cos x$$

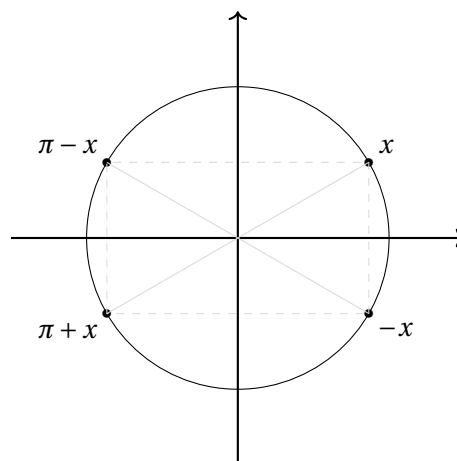
$$\sin(-x) = -\sin x$$

$$\cos(\pi + x) = -\cos x$$

$$\sin(\pi + x) = -\sin x$$

$$\cos(\pi - x) = -\cos x$$

$$\sin(\pi - x) = \sin x$$



Exemple. Calculer les valeurs exactes de $\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right)$ et $\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)$.

Exemple. Calculer les valeurs exactes de $\cos\left(\frac{5\pi}{6}\right)$ et $\sin\left(\frac{4\pi}{3}\right)$.

12.2.3 Formules d'addition

Propriété. Pour tous réels a et b :

$$\cos(a + b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$$

$$\sin(a + b) = \sin a \cos b + \cos a \sin b$$

$$\cos(a - b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b$$

$$\sin(a - b) = \sin a \cos b - \cos a \sin b$$

Exemple. Calculer les valeurs exactes de $\cos\left(\frac{7\pi}{12}\right)$ et $\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)$.

Exemple. Trouver une formule pour $\tan(a + b)$ et $\tan(a - b)$.

12.2.4 Formules de duplication

Propriété. Pour tout réel a :

$$\cos(2a) = \cos^2 a - \sin^2 a = 2\cos^2 a - 1 = 1 - 2\sin^2 a$$

$$\sin(2a) = 2\cos a \sin a$$

Exemple. Exprimer $\cos a$ en fonction de $\cos\left(\frac{a}{2}\right)$. En déduire les valeurs exactes de $\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)$ et $\cos\left(\frac{\pi}{8}\right)$.

Exemple. On considère un réel α tel que $\frac{\pi}{2} \leq \alpha \leq \pi$ et $\sin \alpha = \frac{1}{3}$.
Calculer les valeurs exactes de $\cos \alpha$, $\sin 2\alpha$, $\cos 2\alpha$, $\sin 3\alpha$, $\cos 3\alpha$.

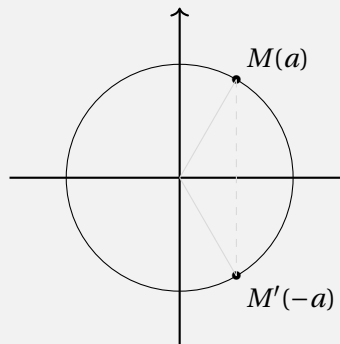
Exemple. Exprimer $\tan(2a)$ en fonction de $\tan a$.

12.2.5 Équations

Propriété. Soit $a \in \mathbb{R}$.

Les solutions dans \mathbb{R} de l'équation $\cos x = \cos a$ sont :

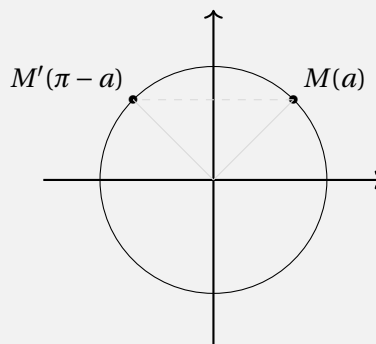
$$\begin{cases} x = a + 2k\pi \\ x = -a + 2k\pi \end{cases}, k \in \mathbb{Z}$$



Propriété. Soit $a \in \mathbb{R}$.

Les solutions dans \mathbb{R} de l'équation $\sin x = \sin a$ sont :

$$\begin{cases} x = a + 2k\pi \\ x = \pi - a + 2k\pi \end{cases}, k \in \mathbb{Z}$$



Exemple. Résoudre dans $[0; 2\pi]$ l'équation $\cos x = \frac{1}{2}$.

Exemple. Résoudre dans $[-\pi; \pi]$ l'équation $\sin x = -\frac{1}{2}$.

Exemple. Résoudre dans $[0; 2\pi]$ l'inéquation $\cos x \geq \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Exemple. Résoudre dans $[0; 2\pi]$ l'inéquation $\sin x < \frac{\sqrt{3}}{2}$.

12.3 Fonctions trigonométriques

Définition.

- La fonction $x \in \mathbb{R} \mapsto \cos x$ est appelée **fonction cosinus**.
- La fonction $x \in \mathbb{R} \mapsto \sin x$ est appelée **fonction sinus**.

12.3.1 Parité - Périodicité

Définition. Une fonction f est dite **paire** si pour tout $x \in \mathcal{D}_f$, $f(-x) = f(x)$.

\mathcal{C}_f est alors **symétrique par rapport à l'axe des ordonnées**.

Une fonction f est dite **impaire** si pour tout $x \in \mathcal{D}_f$, $f(-x) = -f(x)$.

\mathcal{C}_f est alors **symétrique par rapport à l'origine du repère**.

Propriété.

La fonction \cos est **paire**. La fonction \sin est **impaire**.

En particulier, pour tout réel x :

$$\cos(-x) = \cos x \qquad \sin(-x) = -\sin x$$

Définition. Soit f une fonction définie sur \mathcal{D}_f . Soit $T \in \mathbb{R}$.

f est dite **T -périodique** si pour tout réel $x \in \mathcal{D}_f$, $f(x+T) = f(x)$.

Remarque. Si f est T -périodique, alors pour tout entier relatif k , et pour tout réel $x \in \mathbb{D}_f$, on a $f(x+kT) = f(x)$.

Propriété. Les fonctions \cos et \sin sont 2π -périodiques.

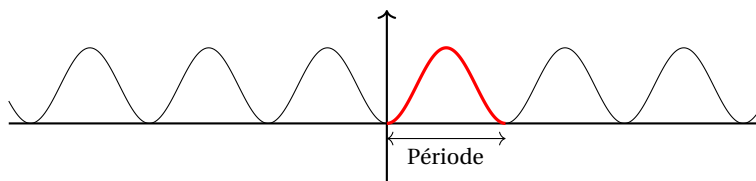
En particulier, pour tout réel x :

$$\cos(x+2\pi) = \cos x \qquad \sin(x+2\pi) = \sin x$$

Plus généralement, on a, pour tout réel x et pour tout entier relatif k :

$$\cos(x+2k\pi) = \cos x \qquad \sin(x+2k\pi) = \sin x$$

Remarque. Pour représenter graphiquement une fonction T -périodique, il suffit de la représenter sur un intervalle de longueur T , puis de dupliquer indéfiniment la partie de la courbe « à gauche et à droite ».



Exemple. Calculer les valeurs exactes de $\cos\left(\frac{7\pi}{2}\right)$ et $\sin\left(\frac{-25\pi}{6}\right)$.

Exemple. Étudier la parité et la périodicité de la fonction f définie sur \mathbb{R} par :

$$f(x) = \cos(2x) - \sin(4x)$$

12.3.2 Dérivabilité

Propriété. Les fonctions \cos et \sin sont dérivables en 0. En particulier, on a :

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - 1}{x} = 0 \qquad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

Démonstration. La démonstration est admise! □

Propriété. Les fonctions \cos et \sin sont dérivables sur \mathbb{R} , et pour tout réel x :

$$\cos'(x) = -\sin x \qquad \sin'(x) = \cos x$$

Démonstration. Soit $a \in \mathbb{R}$. Soit $h \neq 0$. Grâce aux formules d'addition, on a :

$$\begin{aligned} \frac{\cos(a+h) - \cos a}{h} &= \frac{\cos a \cos h - \sin a \sin h - \cos a}{h} \\ &= \frac{\cos a \times (\cos h - 1) - \sin a \sin h}{h} \\ &= \cos a \times \frac{\cos h - 1}{h} - \sin a \times \frac{\sin h}{h} \end{aligned}$$

Or, d'après la propriété précédente, $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\cos h - 1}{h} = 0$ et $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin h}{h} = 1$. On en déduit immédiatement que :

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\cos(a+h) - \cos a}{h} = -\sin a$$

Ainsi, \cos est dérivable en a et :

$$\cos' a = -\sin a$$

La démonstration est analogue pour \sin . □

Propriété. Soit u une fonction dérivable sur I . Les fonctions $\cos(u)$ et $\sin(u)$ sont dérivables sur I , et :

$$\cos'(u) = -u' \sin(u) \qquad \sin'(u) = u' \cos(u)$$

Exemple. Calculer la dérivée des fonctions f et g définies sur \mathbb{R} par :

$$f(x) = 3 \cos x - 2 \sin x$$

$$g(x) = \cos(2x + 1)$$

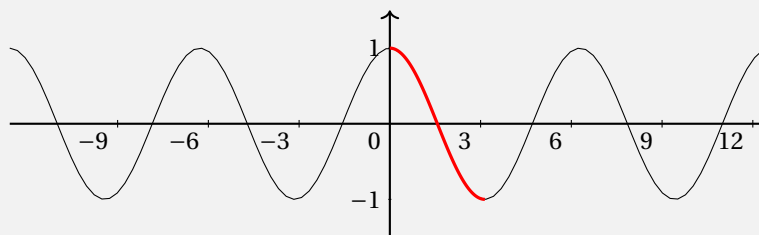
Exemple. Calculer la dérivée de la fonction \tan .

12.3.3 Variations des fonctions cosinus et sinus

Les fonctions cosinus et sinus étant 2π -périodiques, on peut se contenter de les étudier sur un intervalle de longueur 2π comme $[-\pi; \pi]$. Étant de plus paire et impaire (respectivement), on peut encore les étudier sur $[0; \pi]$: leurs variations sur $[-\pi; 0]$ se déduira par symétrie.

Propriété. Les variations de la fonction **cosinus** sont données dans le tableau suivant :

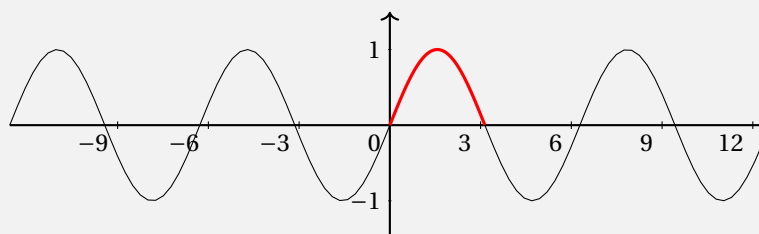
x	0	$\frac{\pi}{2}$	π
$\cos x$	1	0	-1



On remarque la **symétrie par rapport à l'axe des ordonnées**, conséquence de la parité de la fonction.

Propriété. Les variations de la fonction **sinus** sont données dans le tableau suivant :

x	0	$\frac{\pi}{2}$	π
$\sin x$	0	1	0



On remarque la **symétrie par rapport à l'origine du repère**, conséquence de l'imparité de la fonction.