DS n°10 : Fonctions trigonométriques

Durée : 2 heures

Exercice 1. **(4 points)**

Cet exercice est un questionnaire à choix multiples.
Pour chaque question, une seule des quatre propositions est exacte. Indiquer sur la copie le numéro de la question et la lettre de la proposition choisie. ***Aucune justification n'est demandée.***
Pour chaque question, une réponse exacte rapporte un point. Une réponse fausse, une réponse multiple ou l'absence de réponse ne rapporte ni n'enlève de point. Les questions sont indépendantes.

1. Sur l'intervalle $[0; 2\pi]$, l'équation $\sin(x) = 0,2$ admet exactement :

   (a) 0 solution
   (b) 1 solution
   (c) 2 solutions
   (d) 4 solutions

2. On considère la fonction f définie sur $[0; \pi]$ par :

$$f(x) = x + \cos(x)$$

   (a) f est convexe sur $[0; \pi]$
   (b) f est concave sur $[0; \pi]$
   (c) f admet un unique point d'inflexion sur $[0; \pi]$
   (d) f admet deux points d'inflexion sur $[0; \pi]$

3. On considère la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$g(x) = \cos(2x) - \sin(2x)$$

   (a) La fonction g est π-périodique
   (b) La fonction g est paire
   (c) La fonction g est impaire
   (d) Le maximum de g sur $\mathbb{R}$ est 2

4. Pour tout réel x, $\sin(3x)$ est égal à :

   (a) $3\sin(x)\cos(x)$
   (b) $\sin(x) \times \left(3 - 4\sin^2(x)\right)$
   (c) $-\sin(x)$
   (d) $\cos(x) \times \left(4\sin^2(x) - 1\right)$

Exercice 2. **(6 points)**

Partie A : Étude d'une fonction

On considère la fonction g définie sur $\left[0\,;\,\dfrac{\pi}{2}\right]$ par :

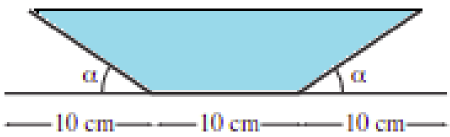
$$g(x) = \sin(x) \times (1 + \cos(x))$$

1. On admet que g est dérivable sur $\left[0\,;\,\dfrac{\pi}{2}\right]$. Calculer $g'(x)$ pour tout réel x de $\left[0\,;\,\dfrac{\pi}{2}\right]$.
2. Vérifier que pour tout $x \in \left[0\,;\,\dfrac{\pi}{2}\right]$, $g'(x) = 2\,(\cos(x) + 1)\left(\cos(x) - \dfrac{1}{2}\right)$.

   En déduire le signe de $g'(x)$ sur $\left[0\,;\,\dfrac{\pi}{2}\right]$.
3. Dresser le tableau de variations de g sur $\left[0\,;\,\dfrac{\pi}{2}\right]$.

Partie B : Volume maximum

On fabrique une gouttière en repliant de chaque côté un tiers d'une longue feuille de zinc de 30cm de large.



On note α l'angle du pli effectué. On cherche à déterminer la valeur de $\alpha \in \left[0\,;\,\dfrac{\pi}{2}\right]$ pour que la gouttière puisse retenir la plus grande quantité d'eau possible. On admet que le volume d'eau retenu est maximal lorsque l'aire de la section de la gouttière (le trapèze sur la figure ci-dessus) est maximale.

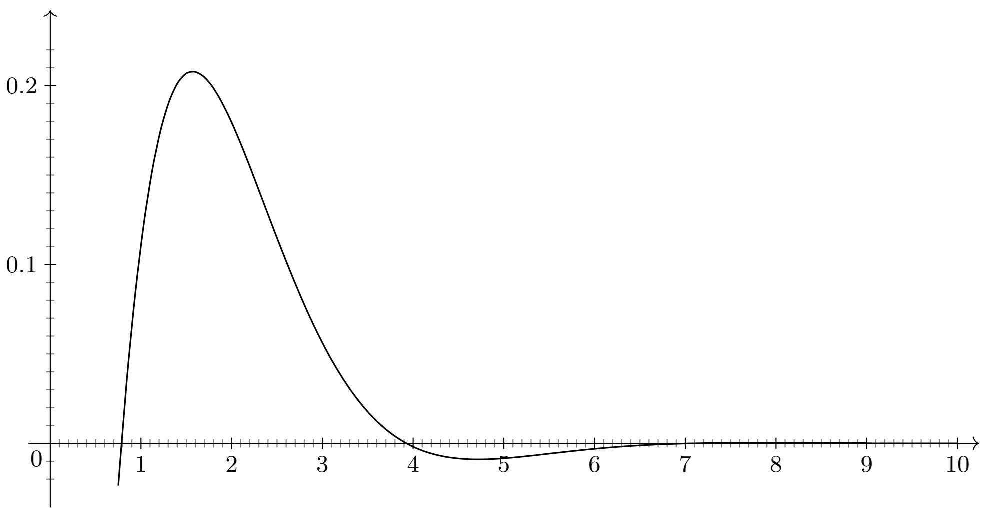
1. À l'aide de considérations géométriques et d'un schéma, montrer que l'aire du trapèze est égale à $100 \times g(\alpha)$, où g est la fonction de la partie A.
2. En déduire la valeur de α répondant au problème.

Exercice 3. **(10 points)**

Dans cet exercice, on considère la fonction f définie sur $[0; +\infty[$ par :

$$f(x) = e^{-x}\,(\sin(x) - \cos(x))$$

La courbe représentative de f est donnée dans le repère orthogonal ci-dessous :



Partie A : Conjectures

À l'aide de la représentation graphique de f donnée, conjecturer :

1. La limite de $f(x)$ en $+\infty$.
2. Le maximum de f sur $[0;+\infty[$.
3. Les solutions de l'équation $f(x)=0$ sur l'intervalle $[0;2\pi]$.

Partie B : Démonstrations

1. (a) Démontrer que pour tout réel $x \geqslant 0$: $-2e^{-x} \leqslant f(x) \leqslant 2e^{-x}$
   (b) En déduire la limite de f en $+\infty$.
2. (a) Justifier que f est dérivable sur $[0;+\infty[$, et calculer $f'(x)$ pour tout $x \in [0;+\infty[$.
   (b) Étudier le signe de $f'(x)$ sur $[0;2\pi]$; en déduire que f admet un maximum sur $[0;2\pi]$, dont on déterminera la valeur exacte.
   (c) Démontrer que pour tout réel $x \in [0;+\infty[$, $f(x+2\pi)=e^{-2\pi}f(x)$, puis que $|f(x+2\pi)|<|f(x)|$.
   En déduire que le maximum de f sur $[0;2\pi]$ est le maximum de f sur $[0;+\infty[$.
3. (a) Démontrer que pour tout réel x, $\sin(x)-\cos(x)=-\sqrt{2}\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$.
   (b) Résoudre sur $[0;2\pi]$ l'équation $\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=0$.
   (c) Déduire des questions précédentes les solutions de l'équation $f(x)=0$ sur $[0;2\pi]$.

Partie C : Bonus

Étudier la convexité de f sur $[0;2\pi]$.