

## DS n°10 : Fonctions trigonométriques

Correction

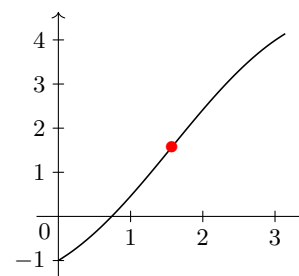
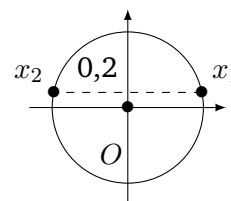
## Exercice 1.

1. Réponse c) : 2 solutions2. Réponse c) :  $f$  admet un unique point d'inflexion sur  $[0; \pi]$ 

$f$  est deux fois dérivable sur  $[0; \pi]$  et pour tout  $x \in [0; \pi]$ ,  
 $f''(x) = -\cos(x)$ .

Ainsi,  $f''$  n'est pas de signe constant sur  $[0; \pi]$  mais s'annule  
 une fois en changeant de signe, en  $\frac{\pi}{2}$ .

$f$  admet donc un unique point d'inflexion en  $x = \frac{\pi}{2}$ .

3. Réponse a) : La fonction  $g$  est  $\pi$ -périodique

Pour tout réel  $x$ ,  $g(-x) = \cos 2x + \sin(2x)$  donc  $g$  n'est ni paire ni impaire.

Pour tout réel  $x$ ,  $g(x + \pi) = g(x)$  donc  $g$  est bien  $\pi$ -périodique.

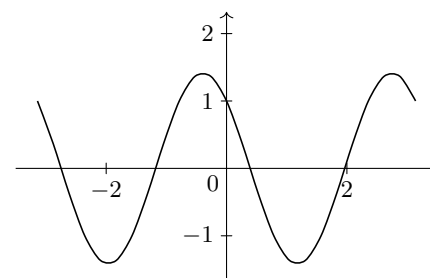
La réponse d est donc nécessairement fausse (on pourra  
 vérifier en étudiant la fonction que le maximum de  $g$  sur  
 $[0; \pi]$  (et donc le maximum de  $g$  sur  $\mathbb{R}$  par périodicité) est  
 égal à  $\sqrt{2}$ ).

Ici, on peut répondre facilement en s'aidant de la calcula-  
 trice, en éliminant rapidement les réponses b, c et d.

4. Réponse b) :  $\sin(x) \times (3 - 4 \sin^2(x))$ 

On utilise les formules d'addition et de duplication. Pour tout réel  $x$  :

$$\begin{aligned}
 \sin(3x) = \sin(2x + x) &= \sin(2x) \cos(x) + \sin(x) \cos(2x) \\
 &= 2 \sin(x) \cos(x) \times \cos(x) + \sin(x) \times (1 - 2 \sin^2(x)) \\
 &= \sin(x) \times (2 \cos^2(x) + 1 - 2 \sin^2(x)) \\
 &= \sin(x) \times (2 \times (1 - \sin^2(x)) + 1 - 2 \sin^2(x)) \\
 &= \sin(x) \times (3 - 4 \sin^2(x))
 \end{aligned}$$



**Exercice 2.****Partie A : Étude d'une fonction**

1. Pour tout  $x \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$  :

$$\begin{aligned} g'(x) &= \cos(x) \times (1 + \cos(x)) + \sin(x) \times (-\sin(x)) \\ &= \cos(x) + \cos^2(x) - \sin^2(x) \\ &= \cos(x) + \cos^2(x) - (1 - \cos^2(x)) \\ &= \boxed{2 \cos^2(x) + \cos(x) - 1} \end{aligned}$$

2. Pour tout  $x \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$  :

$$\begin{aligned} 2(\cos(x) + 1) \left(\cos(x) - \frac{1}{2}\right) &= 2 \left(\cos^2(x) - \frac{1}{2} \cos(x) + \cos(x) - \frac{1}{2}\right) \\ &= 2 \cos^2(x) + \cos(x) - 1 \\ &= g'(x) \end{aligned}$$

Pour tout  $x \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ ,  $\cos(x) + 1 > 0$  donc  $g'(x)$  est du signe de  $\cos(x) - \frac{1}{2}$ . Sur l'intervalle  $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ , on a :

$$\cos(x) - \frac{1}{2} \geq 0 \iff \cos(x) \geq \frac{1}{2} \iff x \in \left[0; \frac{\pi}{3}\right]$$

On peut ainsi donner le signe de  $g'(x)$  :

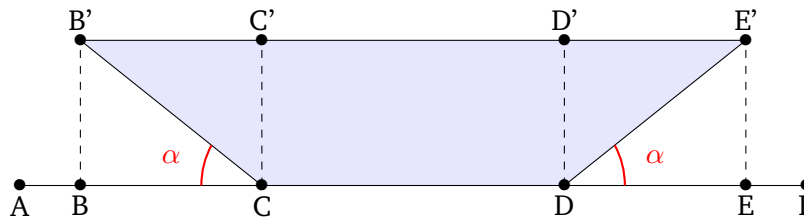
$x$	0	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
Signe de $g'(x)$	+	0	-

3. On en déduit le tableau de variations de  $g$  sur  $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ .

$x$	0	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
Variations de $g$	0	$\frac{3\sqrt{3}}{4}$	1

**Partie B : Volume maximum**

1. On considère le schéma suivant :



L'aire du trapèze est égale à la somme des aires :

- du rectangle CDD'C'
- des triangles CC'B' et DD'E', dont la somme est égale (par symétrie) à l'aire du rectangle DD'E'E

D'une part,  $\mathcal{A}(CDD'C') = 10 \times DD'$  et  $\mathcal{A}(DD'E'E) = DE \times DD'$ . L'aire cherchée est donc égale à :

$$DD' \times (10 + DE)$$

Or :

- $DE = DE' \times \cos(\alpha) = 10 \cos(\alpha)$
- $DD' = EE' = DE' \times \sin(\alpha) = 10 \sin(\alpha)$

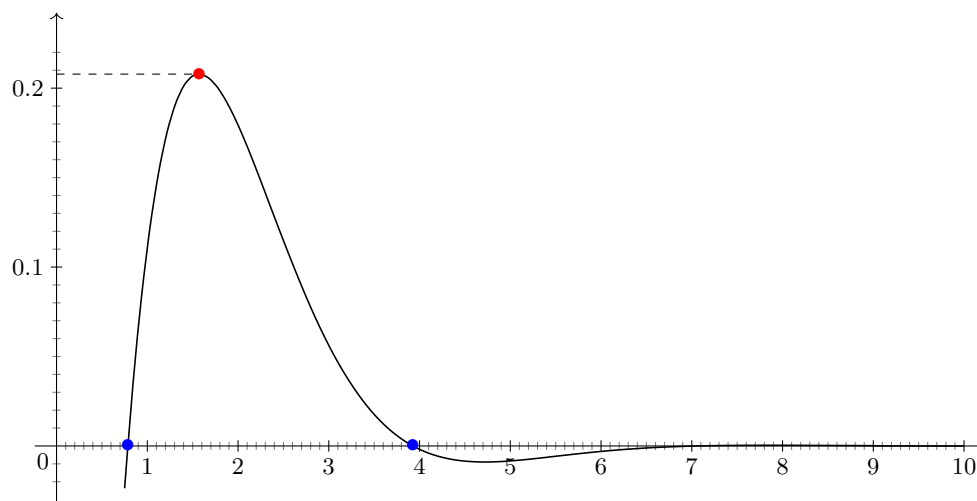
Ainsi, l'aire cherchée est égale à :

$$\begin{aligned} DD' \times (10 + DE) &= 10 \sin(\alpha) \times (10 + 10 \cos(\alpha)) \\ &= 100 \times \sin(\alpha) \times (1 + \cos(\alpha)) \\ &= \boxed{100 \times g(\alpha)} \end{aligned}$$

2. D'après la partie A,  $g$  atteint son maximum est  $x = \frac{\pi}{3}$ . Ainsi, la valeur de  $\alpha$  répondant au problème est :

$$\boxed{\alpha = \frac{\pi}{3}}$$

## Exercice 3.



## Partie A : Conjectures

On conjecture que :

1. La limite de  $f$  en  $+\infty$  est 0.
2. Le maximum de  $f$  sur  $[0; +\infty[$  est environ 0,21.
3. L'équation  $f(x) = 0$  admet 2 solutions sur l'intervalle  $[0; 2\pi]$  : (environ) 0,8 et 3,9.

## Partie B : Démonstrations

1. (a) Pour tout  $x \geq 0$ , on a :

$$-1 \leq \cos(x) \leq 1 \implies -1 \leq -\cos(x) \leq 1 \quad \text{et} \quad -1 \leq \sin(x) \leq 1$$

En ajoutant ces inégalités terme à terme, on obtient ainsi :

$$\forall x \geq 0, \quad -2 \leq \sin(x) - \cos(x) \leq 2$$

En multipliant par  $e^{-x} > 0$ , on obtient l'inégalité voulue :

$$\boxed{\forall x \geq 0, \quad -2e^{-x} \leq f(x) \leq 2e^{-x}}$$

☞ Cette inégalité reste vraie si  $x \leq 0$

- (b) Comme  $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-x} = 0$ , on en déduit d'après le théorème des gendarmes que  $\boxed{\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0}$ .

2. (a) Les fonctions  $x \mapsto e^x$ ,  $x \mapsto \cos(x)$  et  $x \mapsto \sin(x)$  sont dérivables sur  $[0; +\infty[$ , donc  $f$  est dérivable sur  $[0; +\infty[$  comme somme, produit et composée de fonctions dérivables sur  $[0; +\infty[$ .

Pour tout  $x \in [0; +\infty[$  :

$$\begin{aligned} f'(x) &= -e^{-x} (\sin(x) - \cos(x)) + e^{-x} (\cos(x) + \sin(x)) \\ &= \boxed{2 \cos(x) e^{-x}} \end{aligned}$$

(b) Pour tout réel  $x$ ,  $e^{-x} > 0$  donc  $f'(x)$  est du signe de  $\cos(x)$ . Sur  $[0; 2\pi]$  :

$$\cos(x) \geq 0 \iff x \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right] \cup \left[\frac{3\pi}{2}; 2\pi\right]$$

On en déduit le tableau de variations de  $f$  sur  $[0; 2\pi]$  :

$x$	0	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{2}$	$2\pi$	
Signe de $f'(x)$	+	0	-	0	+
Variations de $f$	-1	$e^{-\frac{\pi}{2}}$	$-e^{-\frac{3\pi}{2}}$	$-e^{-2\pi}$	

La valeur en  $\frac{\pi}{2}$  étant la seule positive, on en déduit que  $f$  admet pour maximum  $e^{-\frac{\pi}{2}}$  sur  $[0; 2\pi]$ .

(c) Pour tout réel  $x \geq 0$  :

$$\begin{aligned} f(x+2\pi) &= e^{-(x+2\pi)} (\sin(x+2\pi) - \cos(x+2\pi)) \\ &= e^{-x-2\pi} (\sin(x) - \cos(x)) \quad (\cos \text{ et } \sin \text{ sont } 2\pi\text{-périodiques}) \\ &= e^{-2\pi} \times e^{-x} (\sin(x) - \cos(x)) \\ &= e^{-2\pi} \times f(x) \end{aligned}$$

Comme  $e^{-2\pi} < 1$ , on en déduit que pour tout réel  $x \geq 0$ ,  $|f(x+2\pi)| < |f(x)|$ .

Si  $x \in [0; 2\pi]$ , alors  $|f(x)| \leq f(\frac{\pi}{2})$  (par définition du maximum. Mais  $x+2\pi \in [2\pi; 4\pi]$ , et l'inégalité précédente affirme ainsi que  $|f(x)| \leq f(\frac{\pi}{2})$  est encore vraie sur  $[2\pi; 4\pi]$ , et donc sur  $[0; 4\pi]$ ).

Par une récurrence immédiate, on en déduit que  $|f(x)| < |f(\frac{\pi}{2})|$  est vraie pour tout réel  $x \geq 0$ .

$e^{-\frac{\pi}{2}}$  est donc bien le maximum de  $f$  sur  $[0; +\infty[$ .

3. (a) Pour tout réel  $x$ , on a :

$$\begin{aligned} \cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right) &= \cos(x) \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) - \sin(x) \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) \\ &= \frac{\sqrt{2}}{2} \times (\cos(x) - \sin(x)) \\ \implies -\sqrt{2} \cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right) &= -\sqrt{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} \times (\cos(x) - \sin(x)) \\ &= \boxed{\sin(x) - \cos(x)} \end{aligned}$$

(b) Avant de résoudre l'équation, il faut définir l'intervalle de résolution :  $x \in [0; 2\pi] \implies x + \frac{\pi}{4} \in \left[\frac{\pi}{4}; \frac{9\pi}{4}\right]$

Donc :

$$\cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = 0 \implies \begin{cases} x + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2} & \implies x = \frac{\pi}{4} \\ x + \frac{\pi}{4} = \frac{3\pi}{2} & \implies x = \frac{5\pi}{4} \end{cases} \implies \boxed{S = \left\{\frac{\pi}{4}; \frac{5\pi}{4}\right\}}$$

(c) Pour tout  $x \in [0; 2\pi]$ ,  $f(x) = e^{-x} (\sin(x) - \cos(x)) = -\sqrt{2}e^{-x} \cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$ . Comme  $e^{-x} \neq 0$  :

$$f(x) = 0 \iff \cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = 0 \iff \boxed{x \in \left\{\frac{\pi}{4}; \frac{5\pi}{4}\right\}}$$

**Partie C : Bonus**

Pour étudier la convexité de  $f$  sur  $[0; 2\pi]$ , il suffit d'étudier le signe de  $f''(x)$  sur  $[0; 2\pi]$ , la fonction  $f$  étant deux fois dérivable sur cet intervalle.

On montre facilement que pour tout  $x \in [0; 2\pi]$ ,  $f''(x) = -2e^{-x} (\cos(x) + \sin(x))$ .

Comme précédemment, on remarque que pour tout  $x \in [0; 2\pi]$  :

$$\begin{aligned} \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) &= \cos(x) \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + \sin(x) \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) \\ &= \frac{\sqrt{2}}{2} \times (\cos(x) + \sin(x)) \\ \implies \sqrt{2} \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) &= \sqrt{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} \times (\cos(x) + \sin(x)) \\ &= \boxed{\cos(x) + \sin(x)} \end{aligned}$$

Ainsi,  $f''(x) = -2e^{-x} \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$ . Comme  $e^{-x} > 0$ , on a :

$$f''(x) \geq 0 \iff \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) \leq 0$$

Or  $x \in [0; 2\pi] \implies x - \frac{\pi}{4} \in \left[-\frac{\pi}{4}; \frac{7\pi}{4}\right]$ , on a donc :

$$\cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) \leq 0 \iff x - \frac{\pi}{4} \in \left[\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right] \iff x \in \left[\frac{3\pi}{4}; \frac{7\pi}{4}\right]$$

On en déduit la convexité de  $f$  sur  $[0; 2\pi]$  :

$x$	0	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{7\pi}{4}$	$2\pi$	
Signe de $f''(x)$	-	0	+	0	-
Convexité de $f$	Concave		Convexe		Concave