

Exercices : Fonctions trigonométriques

Équations et inéquations

Exercice 1. Résoudre dans $]-\pi ; \pi]$ les équations suivantes :

$$\cos x = \frac{\sqrt{3}}{2} \quad \sin x = \frac{1}{2} \quad \cos x = 0 \quad \sin x = \frac{\sqrt{2}}{2} \quad \cos x = -1 \quad \sin x = -\frac{1}{2}$$

$$\cos(2x) = \frac{1}{2} \quad \sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2} \quad \cos\left(2x + \frac{\pi}{6}\right) = 0$$

Exercice 2. Résoudre dans $[0 ; 2\pi[$ les inéquations suivantes :

$$1. \cos x > 0 \quad 2. \sin(x) \cos(x) < 0 \quad 3. \sin x < \frac{1}{2} \quad 4. \sin^2 x > \cos x$$

Exercice 3. Déterminer le signe de $2 \sin x + 1$ sur $]-\pi ; \pi]$ puis sur $[0 ; 2\pi[$.

Exercice 4. Pour tout réel x tel que $\cos x \neq 0$, on définit la *tangente* du nombre x par $\tan(x) = \frac{\sin x}{\cos x}$.

1. Calculer $\tan(0)$, $\tan\left(\frac{\pi}{6}\right)$, $\tan\left(\frac{\pi}{4}\right)$, $\tan\left(\frac{\pi}{3}\right)$.
2. Soit $x \in \left[0 ; \frac{\pi}{2}\right[$. Démontrer que $1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$.
3. Déterminer le signe de $\tan x$ sur $\left]-\frac{\pi}{2} ; \frac{\pi}{2}\right[$.

Formules d'addition et de duplication

Exercice 5. En utilisant le fait que $\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{12}$, calculer les valeurs exactes de $\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)$ et $\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)$.

Exercice 6. En utilisant le fait que $\frac{\pi}{4} = 2 \times \frac{\pi}{8}$, calculer les valeurs exactes de $\cos\left(\frac{\pi}{8}\right)$ et $\sin\left(\frac{\pi}{8}\right)$.

Exercice 7. En utilisant le fait que $3x = 2x + x$, exprimer :

1. $\cos(3x)$ en fonction de $\cos x$
2. $\sin(3x)$ en fonction de $\sin x$

Exercice 8. Résoudre dans $]-\pi ; \pi]$ les équations et inéquations suivantes :

$$1. \cos(2x) = 1 + \sin^2 x \quad 2. \cos(2x) > \cos x + 1 \quad 3. \sin(2x) < \sin x$$

Exercice 9. Soient a et b deux nombres réels tels que $\tan(a)$, $\tan(b)$ et $\tan(a+b)$ soient définis.

Démontrer que :

$$\tan(a+b) = \frac{\tan(a) + \tan(b)}{1 - \tan(a)\tan(b)}$$

Exercice 10. Calcul de $\cos\left(\frac{\pi}{5}\right)$

Dans cet exercice, on se propose de déterminer, pour quelques valeurs de n , l'expression du polynôme P_n vérifiant l'égalité $P_n(\cos t) = \cos(nt)$, pour $t \in \mathbb{R}$.

1. Exprimer $\cos(2t)$ en fonction de $\cos t$, et en déduire l'expression de P_2 .
2. Démontrer que :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{Z}, \quad \cos((n+1)t) + \cos((n-1)t) = 2 \cos(nt) \cos t$$

3. En déduire $\cos(3t)$ en fonction de $\cos t$ et l'expression de P_3 .
4. Déterminer de même P_4 et P_5 .
5. Résoudre l'équation $P_5(x) = 0$.
6. En déduire la valeur de $\cos\left(\frac{\pi}{10}\right)$, puis celle de $\cos\left(\frac{\pi}{5}\right)$.

Étude de fonctions trigonométriques

Exercice 11. Dans chaque cas, calculer la dérivée de la fonction f :

- | | | |
|--------------------------|---|---------------------------------|
| 1. $f(x) = x - \cos x$ | 4. $f(x) = \cos x \sin x$ | 7. $f(x) = \cos(3x)$ |
| 2. $f(x) = x \sin x$ | 5. $f(x) = \cos^2 x$ | 8. $f(x) = \sin(4x - 1)$ |
| 3. $f(x) = x^2 + \cos x$ | 6. $f(x) = \frac{1 + \cos x}{2 + \sin x}$ | 9. $f(x) = \sin^2 x - \sin(2x)$ |

Exercice 12. Étudier la fonction f définie sur $[0; 2\pi]$ par $f(x) = 2 \cos x + \sqrt{2}$.

Exercice 13. Soit f la fonction définie sur $[0; \pi]$ par $f(x) = (1 - \cos x) \sin x$.

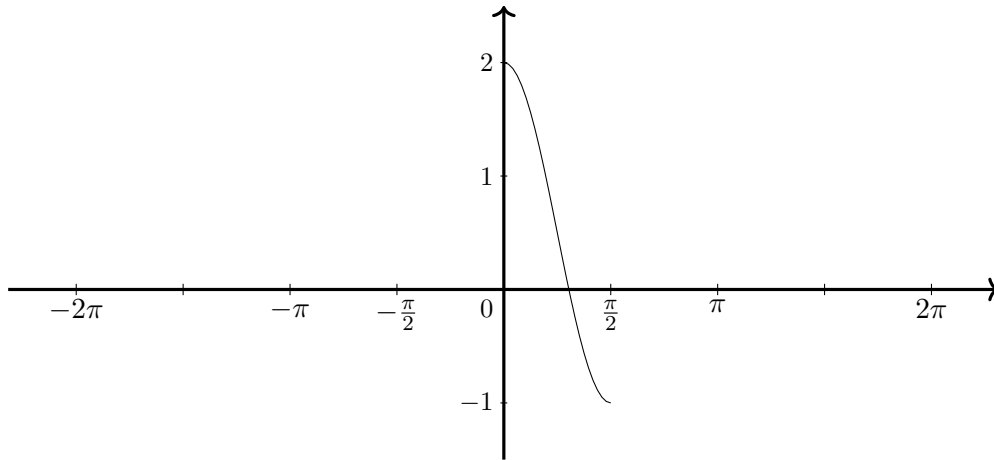
1. Calculer la dérivée de f .
2. Montrer que pour tout $x \in [0; \pi]$, on a $f'(x) = (1 + 2 \cos x)(1 - \cos x)$.
3. En déduire les variations de f sur $[0; \pi]$.
4. Construire la courbe représentative de f sur $[0; \pi]$.

Exercice 14. Dans cet exercice, on s'intéresse à l'équation (E) : $\cos x = x$.

1. Conjecturer graphiquement, à l'aide de la calculatrice, le nombre de solutions de l'équation (E) .
2. Justifier que les solutions sont dans l'intervalle $[-1; 1]$.
3. Étudier les variations de la fonction f définie sur $[-1; 1]$ par $f(x) = x - \cos x$.
4. En déduire le nombre de solutions ainsi qu'une valeur approchée à 10^{-3} près de cette (ces) solution(s).

Exercice 15. Soit f la fonction définie sur \mathbb{R} par $f(x) = 2 \cos(2x) + \sin^2 x$, représentée ci-dessous sur $[0; \frac{\pi}{2}]$.

1. Montrer que f est paire et π -périodique.
2. Compléter le graphique en représentant f sur $[-2\pi; 2\pi]$, en justifiant la méthode.



Exercice 16. Soit f la fonction définie sur \mathbb{R} par $f(x) = \cos x - \cos^2 x$.

1. Démontrer que f est paire et 2π -périodique.
2. Calculer $f'(x)$ et étudier son signe sur $[0; \pi]$.
3. Donner le tableau de variations de f sur $[0; \pi]$.
4. Étudier le signe de $f(x)$ sur $[0; \pi]$.
5. Représenter graphiquement la fonction f sur l'intervalle $[-2\pi; 2\pi]$ en justifiant la démarche.

Exercice 17. Soit $f(x) = e^{-x} \sin x$. Quel est le maximum de $f(x)$ sur $[0; 2\pi]$?

Exercice 18. On définit la fonction *tangente*, notée \tan , par $\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$.

1. Quel est l'ensemble de définition \mathcal{D}_{\tan} de la fonction \tan ?
2. Montrer que \tan est impaire et π -périodique.
3. Étudier les variations de \tan sur $]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}[$.
4. Représenter graphiquement la fonction \tan sur $[-2\pi; 2\pi]$.