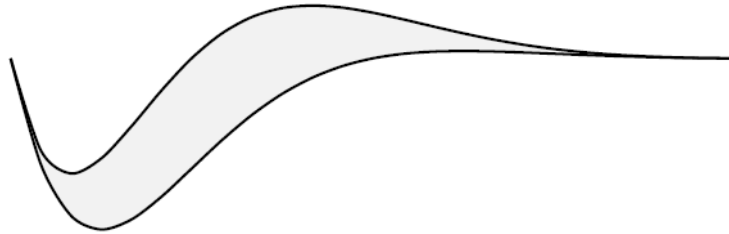


## TRAVAIL EN GROUPE : FONCTIONS TRIGONOMÉTRIQUES

### Sujet A : Logo Trigo

Un publicitaire souhaite imprimer le logo ci-dessous sur un T-shirt :



Il dessine ce logo à l'aide des courbes de deux fonctions  $f$  et  $g$  définies sur  $\mathbb{R}$  par :

$$f(x) = e^{-x}(-\cos x + \sin x + 1) \quad \text{et} \quad g(x) = -e^{-x} \cos x$$

On admet que les fonctions  $f$  et  $g$  sont dérivables sur  $\mathbb{R}$ .

### Partie A — Étude de la fonction $f$

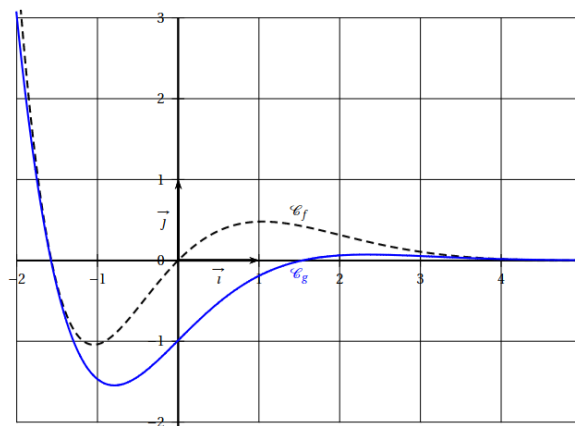
- Justifier que, pour tout  $x \in \mathbb{R}$  :

$$-e^{-x} \leq f(x) \leq 3e^{-x}.$$

- En déduire la limite de  $f$  en  $+\infty$ .
- Démontrer que, pour tout  $x \in \mathbb{R}$ ,  $f'(x) = e^{-x}(2 \cos x - 1)$  où  $f'$  est la fonction dérivée de  $f$ .
- Dans cette question, on étudie la fonction  $f$  sur l'intervalle  $[-\pi ; \pi]$ .
  - Déterminer le signe de  $f'(x)$  pour  $x$  appartenant à l'intervalle  $[-\pi ; \pi]$ .
  - En déduire les variations de  $f$  sur  $[-\pi ; \pi]$ .

### Partie B — Positions relatives

On note  $\mathcal{C}_f$  et  $\mathcal{C}_g$  les représentations graphiques des fonctions  $f$  et  $g$  dans un repère orthonormé.



- Étudier la position relative de la courbe  $\mathcal{C}_f$  par rapport à la courbe  $\mathcal{C}_g$  sur  $\mathbb{R}$ .

## TRAVAIL EN GROUPE : FONCTIONS TRIGONOMÉTRIQUES

*Sujet B : Avec la fonction exponentielle !*

### Partie A - Question préliminaire

1. Démontrer que pour tout réel  $\theta$ ,  $\cos(\theta) + \sin(\theta) = \sqrt{2} \cos\left(\theta - \frac{\pi}{4}\right)$

### Partie B - Étude de fonctions

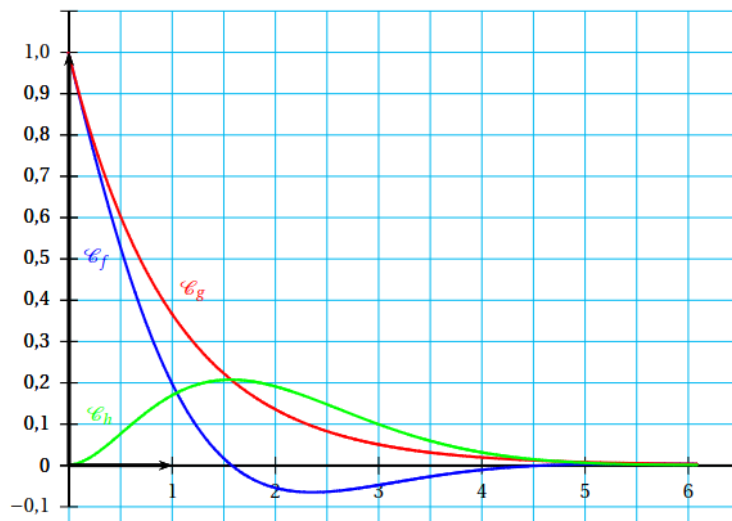
On considère les fonction  $f$  et  $g$  définies sur  $[0; +\infty[$  par :

$$f(x) = e^{-x} \cos(x) \quad g(x) = e^{-x}$$

On définit également la fonction  $h$  sur  $[0; +\infty[$  par  $h(x) = g(x) - f(x)$ .

On admet que les fonctions  $f$ ,  $g$  et  $h$  sont dérivables sur  $[0; +\infty[$ .

Les représentations graphiques de ces trois fonctions sont données ci-dessous dans un repère orthogonal :



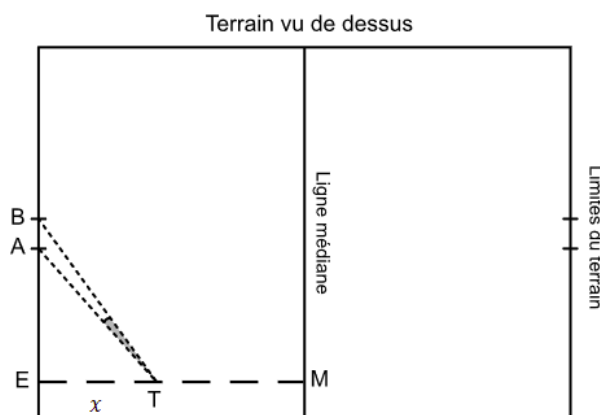
1. Conjecturer :
  - (a) les limites des fonctions  $f$  et  $g$  en  $+\infty$  ;
  - (b) la position relative de  $\mathcal{C}_f$  par rapport à  $\mathcal{C}_g$  ;
  - (c) la valeur de l'abscisse  $x$  pour laquelle l'écart entre les deux courbes  $\mathcal{C}_f$  et  $\mathcal{C}_g$  est maximal.
2. Justifier que  $\mathcal{C}_g$  est située au-dessus de  $\mathcal{C}_f$  sur l'intervalle  $[0; +\infty[$ .
3. Démontrer que la droite d'équation  $y = 0$  est asymptote horizontale aux courbes  $\mathcal{C}_f$  et  $\mathcal{C}_g$ .
4. (a) Démontrer que, pour tout  $x$  de l'intervalle  $[0; +\infty[$ ,  $h'(x) = e^{-x} \left[ \sqrt{2} \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) - 1 \right]$ .  
 (b) Résoudre l'inéquation  $\sqrt{2} \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) - 1 \geq 0$  sur  $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ .  
 (c) En déduire le tableau de variation de la fonction  $h$  sur l'intervalle  $[0; 2\pi]$ .
5. Démontrer que la fonction  $H$  définie sur l'intervalle  $[0; +\infty[$  par  $H(x) = \frac{1}{2} e^{-x} [-2 + \cos(x) - \sin(x)]$  est une primitive de la fonction  $h$ .

## TRAVAIL EN GROUPE : FONCTIONS TRIGONOMÉTRIQUES

### Sujet C : Angle maximal

Lors d'un match de rugby, un joueur doit transformer un essai qui a été marqué au point E (voir figure ci-contre) situé à l'extérieur du segment [AB].

La transformation consiste à taper le ballon par un coup de pied depuis un point T que le joueur a le droit de choisir n'importe où sur le segment [EM] perpendiculaire à la droite (AB) sauf en E. La transformation est réussie si le ballon passe entre les poteaux repérés par les points A et B sur la figure.



Pour maximiser ses chances de réussite, le joueur tente de déterminer la position du point T qui rend l'angle  $\widehat{ATB}$  le plus grand possible.

Le but de cet exercice est donc de rechercher s'il existe une position du point T sur le segment [EM] pour laquelle l'angle  $\widehat{ATB}$  est maximum et, si c'est le cas, de déterminer une valeur approchée de cet angle.

Dans toute la suite, on note  $x$  la longueur ET, qu'on cherche à déterminer.

Les dimensions du terrain sont les suivantes :  $EM = 50$  m,  $EA = 25$  m et  $AB = 5,6$  m. On note  $\alpha$  la mesure en radian de l'angle  $\widehat{ETA}$ ,  $\beta$  la mesure en radian de l'angle  $\widehat{ETB}$  et  $\gamma$  la mesure en radian de l'angle  $\widehat{ATB}$ .

1. En utilisant les triangles rectangles ETA et ETB ainsi que les longueurs fournies, exprimer  $\tan \alpha$  et  $\tan \beta$  en fonction de  $x$ .

La fonction tangente est définie sur l'intervalle  $]0; \frac{\pi}{2}[$  par  $\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$ .

2. Montrer que la fonction  $\tan$  est strictement croissante sur l'intervalle  $]0; \frac{\pi}{2}[$ .

3. L'angle  $\widehat{ATB}$  admet une mesure  $\gamma$  appartenant à l'intervalle  $]0; \frac{\pi}{2}[$ , résultat admis ici, que l'on peut observer sur la figure.

On admet que, pour tous réels  $a$  et  $b$  de l'intervalle  $]0; \frac{\pi}{2}[$ ,

$$\tan(a - b) = \frac{\tan a - \tan b}{1 + \tan a \times \tan b}.$$

Montrer que  $\tan \gamma = \frac{5,6x}{x^2 + 765}$ .

4. L'angle  $\widehat{ATB}$  est maximum lorsque sa mesure  $\gamma$  est maximale. Montrer que cela correspond à un minimum sur l'intervalle  $]0; 50]$  de la fonction  $f$  définie par :  $f(x) = x + \frac{765}{x}$ .

Montrer qu'il existe une unique valeur de  $x$  pour laquelle l'angle  $\widehat{ATB}$  est maximum et déterminer cette valeur de  $x$  au mètre près ainsi qu'une mesure de l'angle  $\widehat{ATB}$  à 0,01 radian près.