

---

## Chapitre 14 : Orthogonalité

---

### Table des matières

<b>I</b>	<b>Produit scalaire dans le plan</b>	<b>1</b>
I.1	Norme d'un vecteur . . . . .	1
I.2	Produit scalaire et normes . . . . .	2
I.3	Produit scalaire et angles . . . . .	2
I.4	Produit scalaire et coordonnées . . . . .	3
I.5	Propriétés algébriques . . . . .	3
I.6	Orthogonalité . . . . .	4
<b>II</b>	<b>Produit scalaire dans l'espace</b>	<b>5</b>
II.1	Définition et Propriétés . . . . .	5
II.2	Orthogonalité . . . . .	5
II.3	Vecteur normal à un plan . . . . .	6
II.4	Projection orthogonale . . . . .	7
II.5	Positions relatives . . . . .	7
<b>III</b>	<b>Équation cartésienne d'un plan</b>	<b>7</b>

### Savoirs-faire

- Calculer un produit scalaire en utilisant la formule adaptée
- Démontrer l'orthogonalité, la perpendicularité de deux droite de l'espace
- Déterminer l'équation cartésienne d'un plan
- Utiliser la projection orthogonale pour calculer une distance dans l'espace

# I Produit scalaire dans le plan

Dans cette partie, on considère des points et des vecteurs du plan.

## I.1 Norme d'un vecteur

On rappelle qu'un vecteur est défini par 3 propriétés : une direction, un sens et une norme.

La norme d'un vecteur  $\vec{u}$  correspond à sa longueur, elle est notée  $\|\vec{u}\|$ .

La norme d'un vecteur  $\vec{AB}$  correspond de fait à la longueur du segment  $[AB]$  :  $\|\vec{AB}\| = AB$ .

En règle générale, l'égalité  $\|\vec{u} + \vec{v}\| = \|\vec{u}\| + \|\vec{v}\|$  est **fausse**, mais on dispose de la propriété suivante :

**Propriété 1** (Inégalité triangulaire). *Pour tous vecteurs  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  du plan :*

$$\|\vec{u} + \vec{v}\| \leq \|\vec{u}\| + \|\vec{v}\|$$

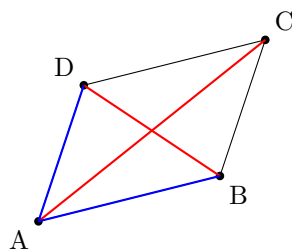
On dispose cependant de l'égalité suivante :

**Propriété 2** (Identité du parallélogramme). *Pour tous vecteurs  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  du plan :*

$$\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 + \|\vec{u} - \vec{v}\|^2 = 2\|\vec{u}\|^2 + 2\|\vec{v}\|^2$$

Si ABCD est un parallélogramme, on obtient alors, en prenant  $\vec{u} = \vec{AB}$  et  $\vec{v} = \vec{AD}$  :

$$AC^2 + BD^2 = 2AB^2 + 2AD^2$$



## I.2 Produit scalaire et normes

**Définition 3.** *Pour tous vecteurs  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  du plan, on définit leur **produit scalaire** par une des deux formules ci-dessous :*

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \frac{1}{2} (\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 - \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2)$$

ou

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \frac{1}{2} (\|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 - \|\vec{u} - \vec{v}\|^2)$$

**Remarques.**

- Le résultat d'un produit scalaire n'est pas un vecteur : c'est un **nombre réel** (on dit que c'est un *scalaire*).
- Les formules sont équivalentes : il suffit d'utiliser l'identité du parallélogramme pour passer de  $\|\vec{u} + \vec{v}\|^2$  à  $\|\vec{u} - \vec{v}\|^2$  et inversement
- Si on se place dans un triangle ABC quelconque et que l'on choisit  $\vec{u} = \vec{AB}$  et  $\vec{v} = \vec{AC}$ , on obtient :

**Propriété.** *Pour tous points A, B et C du plan :*

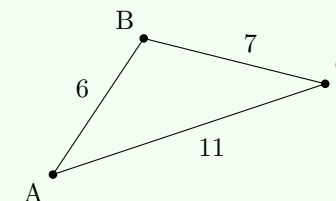
$$\vec{AB} \cdot \vec{AC} = \frac{1}{2} (AB^2 + AC^2 - BC^2)$$



☞ *Un produit scalaire peut être positif ou négatif*

### Exercice 1

Calculer les produits scalaires  $\vec{AB} \cdot \vec{AC}$  et  $\vec{BA} \cdot \vec{BC}$  dans la figure ci-dessous.



### Exercice 2

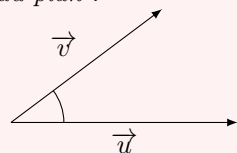
Soit RECT un rectangle tel que RE = 6 et RT = 4. Calculer  $\vec{RE} \cdot \vec{RC}$ .



### I.3 Produit scalaire et angles

**Propriété 4.** Pour tous vecteurs  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  non nuls du plan :

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times \cos(\widehat{(\vec{u}, \vec{v})})$$

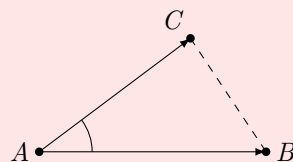


**Remarque.** Dans l'expression précédente,  $\cos(\widehat{(\vec{u}, \vec{v})})$  est le cosinus de la mesure en radians de l'angle formé par les vecteurs  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$ , représentés avec la même origine.

En considérant 3 points, on a la propriété équivalente suivante :

**Propriété.** Pour tous points  $A, B$  et  $C$  du plan distincts :

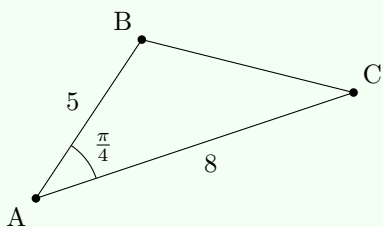
$$\vec{AB} \cdot \vec{AC} = AB \times AC \times \cos(\widehat{BAC})$$



☞ Si on connaît 2 longueurs et 1 angle, on utilise cette formule!

#### Exercice 3

Calculer le produit scalaire  $\vec{AB} \cdot \vec{AC}$  dans la figure ci-dessous.



#### Exercice 4

ABC est un triangle équilatéral de côté 3. Calculer  $\vec{CA} \cdot \vec{CB}$ .



### I.4 Produit scalaire et coordonnées

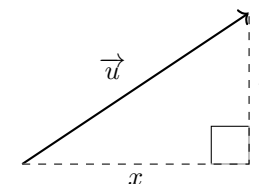
Si l'on se place dans un repère orthonormé, on peut donner des coordonnées aux vecteurs. Grâce à la formule suivante, on peut calculer la norme de n'importe quel vecteur :

**Propriété 5.** Le plan est ramené à un **repère orthonormé**. Pour tout vecteur

$$\vec{u} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} :$$

$$\|\vec{u}\| = \sqrt{x^2 + y^2}$$

Cette relation provient simplement du théorème de Pythagore, et ne s'applique donc que si les axes du repère forment un angle droit (repère orthogonal) et si les unités sont les mêmes sur les deux axes (repère normé).



Le produit scalaire se calcule alors très simplement avec la formule suivante :

**Propriété.** Dans un **repère orthonormé**, on considère les vecteurs  $\vec{u} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

et  $\vec{v} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ . Alors :

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = xx' + yy'$$



#### Exercice 5

Dans un repère orthonormé, on considère les vecteurs :

$$\vec{u} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \vec{v} \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix} \quad \vec{w} \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Calculer  $\vec{u} \cdot \vec{v}$ ,  $\vec{u} \cdot \vec{w}$  et  $\vec{v} \cdot \vec{w}$ .



#### Exercice 6

Dans un repère orthonormé du plan, on considère les points  $A(2;3)$ ,  $B(-2;1)$

et  $C(0;2)$ . Calculer  $\vec{AB} \cdot \vec{AC}$ .



## I.5 Propriétés algébriques

**Propriété 6.** Pour tous vecteurs  $\vec{u}$ ,  $\vec{v}$  et  $\vec{w}$  du plan :

- $\vec{u} \cdot \vec{u} = \|\vec{u}\|^2$  : c'est le **carré scalaire** de  $\vec{u}$ , encore noté  $\vec{u}^2$
- $\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot \vec{u}$  : le produit scalaire est **symétrique**
- $\vec{u} \cdot (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{u} \cdot \vec{w}$  : le produit scalaire est **compatible avec l'addition**
- $(a\vec{u}) \cdot (b\vec{v}) = a \times b \times \vec{u} \cdot \vec{v}$  : le produit scalaire est **compatible avec le produit**
- $(\vec{u} + \vec{v})^2 = \|\vec{u}\|^2 + 2\vec{u} \cdot \vec{v} + \|\vec{v}\|^2$  : c'est une **identité remarquable** pour le produit scalaire

Un cas particulier où le produit scalaire est très facile à calculer, c'est lorsque les vecteurs sont colinéaires. Cette propriété se déduit facilement de la formule avec le cosinus, sachant que  $\cos(0) = 1$  et  $\cos(\pi) = -1$  :


**Propriété.** Soient  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  deux vecteurs du plan **colinéaires**. 

- Si  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  sont de même sens, alors  $\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\|$
- Si  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  sont de sens contraire, alors  $\vec{u} \cdot \vec{v} = -\|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\|$


### Exercice 7

ABCD est un carré de côté 2. Calculer  $\vec{AB} \cdot \vec{CD}$ . 


### Exercice 8

ABCD est un parallélogramme tel que  $AB = 5$ ,  $AD = 4$  et  $BD = 6$ . Calculer  $\vec{AB} \cdot \vec{AC}$ . 

## I.6 Orthogonalité

**Définition.** Soient  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  deux vecteurs du plan. 

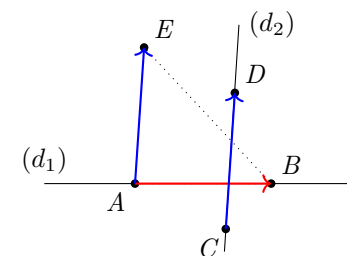
On dit que  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  sont **orthogonaux** lorsque  $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$ . On note alors  $\vec{u} \perp \vec{v}$ .

**Propriété.** Soient  $(d_1)$  et  $(d_2)$  deux droites du plan, de vecteurs directeurs respectifs  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$ . Alors : 

$$(d_1) \perp (d_2) \iff \vec{u} \cdot \vec{v} = 0$$

**Démonstration.** On considère deux droites  $(d_1)$  et  $(d_2)$  du plan.

On choisit 4 points  $A$ ,  $B$ ,  $C$  et  $D$  distincts du plan tels que  $(d_1) = (AB)$  et  $(d_2) = (CD)$ , et on appelle  $E$  le point du plan tel que  $\vec{AE} = \vec{CD}$ . On a alors :



$$\vec{AB} \cdot \vec{CD} = \vec{AB} \cdot \vec{AE} = \frac{1}{2} (AB^2 + AE^2 - BE^2)$$

Ainsi :  $\vec{AB} \cdot \vec{CD} = 0 \iff AB^2 + AE^2 - BE^2 = 0 \iff ABE$  est rectangle en  $A$   
 $\iff (AB) \perp (AE)$

Or  $\vec{AE} = \vec{CD}$ , donc  $(AE) \parallel (CD)$  et donc :  $(AB) \perp (AE) \iff (AB) \perp (CD)$

On a ainsi montré que :  $\vec{AB} \cdot \vec{CD} = 0 \iff (AB) \perp (CD)$  □

### Exercice 9

Dans un repère orthonormé, on considère les points : 

$$A(4 ; 3) \quad B(2 ; 0) \quad C(5 ; -2) \quad D(0 ; 2)$$

Les droites  $(AB)$  et  $(BC)$  sont-elles perpendiculaires? et les droites  $(AC)$  et  $(AD)$ ?

## II Produit scalaire dans l'espace

### II.1 Définition et Propriétés

**Définition 7.** Soient  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  deux vecteurs de l'espace. Soient  $A, B$  et  $C$  trois points tels que  $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$  et  $\vec{v} = \overrightarrow{AC}$ . Soit  $\mathcal{P}$  un plan contenant les trois points  $A, B$  et  $C$ . On définit le produit scalaire de  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  comme étant le produit scalaire  $\vec{u} \cdot \vec{v}$  dans le plan  $\mathcal{P}$ .

Ainsi, tous les résultats précédents continuent à s'appliquer dans l'espace, comme :

- la formule  $\vec{u} \cdot \vec{v} = \frac{1}{2} (\|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 - \|\vec{u} - \vec{v}\|^2)$
- la formule  $\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times \cos(\vec{u}, \vec{v})$
- les propriétés algébriques, comme la symétrie ( $\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot \vec{u}$ )

☞ L'angle  $(\vec{u}, \vec{v})$  ne peut être défini qu'au signe près dans l'espace (selon qu'on regarde le plan « par dessus » ou « par dessous »), mais cela ne change pas son cosinus, la fonction cosinus étant paire

Cependant, dans un repère de l'espace intervient une troisième coordonnée. On a ainsi :

**Propriété.** L'espace est muni d'une base **orthonormée**<sup>a</sup>.



- La norme d'un vecteur  $\vec{u} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$  est :  $\|\vec{u}\|^2 = x^2 + y^2 + z^2$
- Le produit scalaire de deux vecteurs  $\vec{u} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$  et  $\vec{u}' \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$  est donné par :  
$$\vec{u} \cdot \vec{u}' = xx' + yy' + zz'$$

a. Une base formée de vecteurs deux à deux orthogonaux et de norme 1 - voir définition plus bas

**Propriété.** L'espace est muni d'un repère **orthonormé**.



La distance entre deux points  $A(x_A ; y_A ; z_A)$  et  $B(x_B ; y_B ; z_B)$  est donnée par :

$$AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2}$$

#### Exercice 10

Dans un repère orthonormé de l'espace, on considère les points :



$$A(1 ; 2 ; -1) \quad B(0 ; 1 ; 1) \quad C(1 ; 0 ; 2)$$

Calculer  $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$ . En déduire une valeur approchée au degré près de  $\widehat{BAC}$ .

### II.2 Orthogonalité

À l'aide du produit scalaire, on peut définir la notion d'**orthogonalité** dans l'espace, et ce de manière analogue à ce qui a été vu dans le plan.

**Définition.** Deux vecteurs de l'espace sont dits **orthogonaux** si leur produit scalaire est nul.



**Définition.** Deux droites de l'espace sont dites **orthogonales** si leurs vecteurs directeurs sont orthogonaux.



#### Exercice 11

Dans un repère orthonormé de l'espace, on considère les droites  $(d_1)$  et  $(d_2)$  d'équations :



$$(d_1) : \begin{cases} x = 2 + t \\ y = 1 - 2t \\ z = 1 + t \end{cases} \quad t \in \mathbb{R} \quad (d_2) : \begin{cases} x = 1 + 2t' \\ y = 3 + t' \\ z = 1 \end{cases} \quad t' \in \mathbb{R}$$

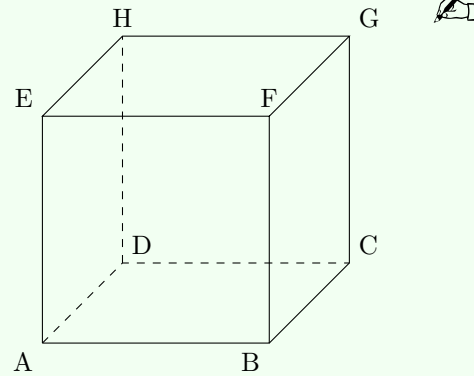
$(d_1)$  et  $(d_2)$  sont-elles orthogonales ?

**Remarque.** Deux droites orthogonales ne sont pas forcément sécantes ! Si c'est le cas, on dit qu'elles sont **perpendiculaires**.

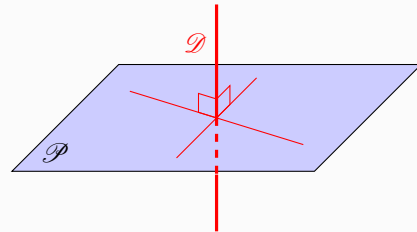
### Exercice 12

Dans le cube  $ABCDEFGH$  ci-contre, nommer :

- deux droites orthogonales non sécantes
- deux droites perpendiculaires
- deux droites non orthogonales



**Définition 8.** Une droite est **orthogonale à un plan** si elle est orthogonale à deux droites sécantes de ce plan.



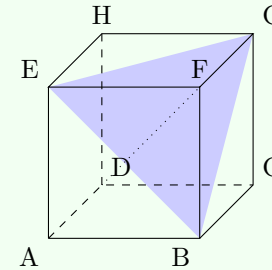
**Propriété 9.** Si une droite est orthogonale à un plan, elle est orthogonale à toute droite de ce plan.

**Théorème.** Soit  $(d)$  une droite de l'espace de vecteur directeur  $\vec{u}$  et soit  $\mathcal{P}$  un plan. Les propositions suivantes sont équivalentes :

- $(d)$  est **orthogonale** à  $\mathcal{P}$
- pour tous points  $M$  et  $N$  de  $\mathcal{P}$ ,  $\vec{u} \cdot \overrightarrow{MN} = 0$
- pour tous vecteurs  $\vec{v}$  et  $\vec{v}'$  directeurs de  $\mathcal{P}$ ,  $\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{u} \cdot \vec{v}' = 0$

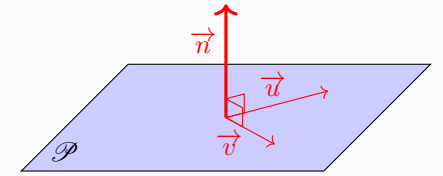
### Exercice 13

Soit  $ABCDEFGH$  un cube. Montrer que  $(DF)$  est orthogonale au plan  $(EBG)$ .



## II.3 Vecteur normal à un plan

**Définition 10.** Un vecteur  $\vec{n}$  est **normal** à un plan  $\mathcal{P}$  si et seulement s'il est non nul et orthogonal à deux vecteurs non colinéaires de  $\mathcal{P}$ .



**Remarque.** Le vecteur directeur d'une droite orthogonale à un plan est un vecteur normal de ce plan.

**Propriété 11.** • Un vecteur normal  $\vec{n}$  à un plan  $\mathcal{P}$  est orthogonal à tous les vecteurs de ce plan.

- Tous les vecteurs normaux à un plan sont colinéaires entre eux.

**Remarque.** Un plan a une infinité de vecteurs normaux !

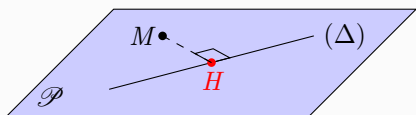
### Exercice 14

Dans un repère orthonormé de l'espace, on considère les points  $A(1 ; 1 ; 0)$ ,  $B(2 ; 0 ; -1)$  et  $C(1 ; 2 ; 1)$ . Montrer que le vecteur  $\vec{n} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$  est normal au plan  $(ABC)$ .

## II.4 Projection orthogonale

**Définition 12.** Soient  $(\Delta)$  une droite et  $M$  un point de l'espace. Soit  $\mathcal{P}$  un plan contenant  $(\Delta)$  et  $M$ .

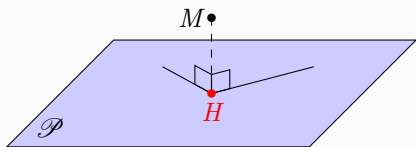
On appelle **projeté orthogonal** de  $M$  sur  $(\Delta)$  le point  $H$  obtenu en projetant orthogonalement  $M$  sur  $(\Delta)$  dans le plan  $\mathcal{P}$ .



**Propriété.** La distance  $MH$  est la **distance du point  $M$  à la droite  $(\Delta)$**  : c'est la plus courte distance entre le point  $M$  et un point quelconque de la droite  $(\Delta)$ . ★

**Définition 13.** Soient  $\mathcal{P}$  un plan et  $M$  un point de l'espace.

On appelle **projeté orthogonal** de  $M$  sur  $\mathcal{P}$  le point  $H$  de  $\mathcal{P}$  tel que  $(HM)$  soit orthogonale à  $\mathcal{P}$ .



**Remarque.** Si  $H$  est le projeté orthogonal de  $M$  sur  $\mathcal{P}$ , alors  $\overrightarrow{MH}$  est normal à  $\mathcal{P}$ .

**Propriété.** La distance  $MH$  est la **distance du point  $M$  au plan  $\mathcal{P}$**  : c'est la plus courte distance entre le point  $M$  et un point quelconque du plan  $\mathcal{P}$ . ★

**Démonstration.** Soient  $M$  un point de l'espace,  $\mathcal{P}$  un plan, et  $H$  le projeté orthogonal de  $M$  sur  $\mathcal{P}$ .

Soit  $A$  un point quelconque du plan  $\mathcal{P}$ .

Comme  $(MH)$  est orthogonale à  $\mathcal{P}$ , alors elle est orthogonale à toute droite du plan  $\mathcal{P}$ , donc de  $(AH)$ .

$(AH)$  et  $(MH)$  étant sécantes (en  $H$ ), il s'en suit que  $(MH)$  et  $(AH)$  sont perpendiculaires. Ainsi, le triangle  $MHA$  est rectangle en  $H$ . Comme tout triangle rectangle, la longueur de son hypoténuse  $[AM]$  est supérieure à la longueur des deux autres côtés, en particulier de  $[MH]$ . Ainsi,  $MH \leq AM$ .

On a donc montré que la distance entre  $M$  et un point quelconque de  $\mathcal{P}$  est toujours supérieure ou égale à la distance  $MH$ . □

## II.5 Positions relatives

Grâce à la notion de vecteur normal, on peut connaître rapidement les positions relatives de deux plans ou d'une droite et un plan.

**Propriété** (Positions relatives de deux plans). ★

Soient  $\mathcal{P}_1$  et  $\mathcal{P}_2$  deux plans de vecteurs normaux  $\vec{n}_1$  et  $\vec{n}_2$ .

- Si  $\vec{n}_1$  et  $\vec{n}_2$  sont **colinéaires**, alors  $\mathcal{P}_1$  et  $\mathcal{P}_2$  sont **parallèles** (ou éventuellement **confondus**).
- Si  $\vec{n}_1$  et  $\vec{n}_2$  sont **orthogonaux**, alors  $\mathcal{P}_1$  et  $\mathcal{P}_2$  sont **perpendiculaires**.
- Sinon,  $\mathcal{P}_1$  et  $\mathcal{P}_2$  sont **sécants**.

☞ Un dessin pour chaque

**Propriété** (Positions relatives d'un plan et d'une droite). ★

Soient  $(d)$  une droite de vecteur directeur  $\vec{u}$  et  $\mathcal{P}$  un plan de vecteur normal  $\vec{n}$ .

- $(d)$  et  $(\mathcal{P})$  sont **parallèles** si  $\vec{u}$  et  $\vec{n}$  sont **orthogonaux**.
- $(d)$  et  $(\mathcal{P})$  sont **orthogonaux** si  $\vec{u}$  et  $\vec{n}$  sont **colinéaires**.
- Sinon

## III Équation cartésienne d'un plan

Un plan de l'espace peut se caractériser par :


- trois points non alignés
- un point et deux vecteurs non colinéaires

On peut également le caractériser à l'aide d'un point et d'un vecteur normal.

**Théorème 14.** (Caractérisation d'un plan de l'espace)

- Soit  $A$  un point de l'espace et soit  $\vec{n}$  un vecteur non nul.  
L'ensemble des points  $M$  de l'espace tels que  $\overrightarrow{AM} \cdot \vec{n} = 0$  est un plan de l'espace.
- Réciproquement, soient  $\mathcal{P}$  un plan de l'espace,  $A \in \mathcal{P}$  et  $\vec{n}$  un vecteur normal à  $\mathcal{P}$ .  
 $\mathcal{P}$  est l'ensemble des points  $M$  de l'espace tels que  $\overrightarrow{AM} \cdot \vec{n} = 0$ .

**Remarque.** Grâce à ce théorème, on peut parler du plan passant par un point  $A$  donné et de vecteur normal  $\vec{n}$  donné.

**Théorème.** Soit  $\vec{n} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$  un vecteur non nul. 


Tout plan  $\mathcal{P}$  admettant  $\vec{n}$  pour vecteur normal admet une équation cartésienne de la forme :

$$ax + by + cz + d = 0 \quad d \in \mathbb{R}$$

Réciproquement, l'ensemble des points  $M(x; y; z)$  de l'espace vérifiant l'équation  $ax + by + cz + d = 0$  (avec  $(a; b; c) \neq (0; 0; 0)$ ) est un plan de vecteur normal


$$\vec{n} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}.$$

**Exercice 15**


Donner une équation du plan  $\mathcal{P}$  passant par  $A(1 ; 0 ; 3)$  et de vecteur normal 

$$\vec{n} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

**Exercice 16**

Donner une équation du plan  $\mathcal{P}$  passant par  $A(-2 ; 1 ; 3)$  et orthogonal à   
la droite  $(BC)$ , avec  $B(1 ; -2 ; 2)$  et  $C(4 ; 1 ; -1)$ .

**Exercice 17**

Soit  $\mathcal{P}$  le plan de l'espace d'équation  $3x + y - 2z + 3 = 0$ .   
Déterminer un vecteur normal à  $\mathcal{P}$  ainsi qu'un point de  $\mathcal{P}$ .