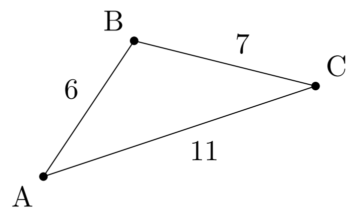
Exercices de Cours : Orthogonalité

I) Produit scalaire dans le plan

Norme d'un vecteur

Produit scalaire et normes

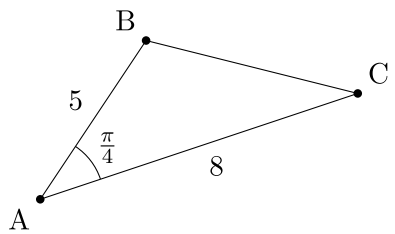
Exercice 01 Calculer les produits scalaires $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC}$ dans la figure ci-dessous.



Exercice 02 Soit RECT un rectangle tel que RE = 6 et RT = 4. Calculer $\overrightarrow{RE} \cdot \overrightarrow{RC}$.

Produit scalaire et angles

Exercice 03 Calculer le produit scalaire $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$ dans la figure ci-dessous.



Exercice 04 ABC est un triangle équilatéral de côté 3. Calculer $\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB}$.

Produit scalaire et coordonnées

Exercice 05 Dans un repère orthonormé, on considère les vecteurs : $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}$ $\overrightarrow{v}\begin{pmatrix}-1\\3\end{pmatrix}$ $\overrightarrow{w}\begin{pmatrix}4\\0\end{pmatrix}$
Calculer $\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{v}$, $\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{w}$ et $\overrightarrow{v}\cdot\overrightarrow{w}$.

Exercice 06 Dans un repère orthonormé du plan, on considère les points A(2 ;3), B(-2 ;1) et C(0 ;2).
Calculer $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$.

Propriétés algébriques

Exercice 07 ABCD est un carré de côté 2. Calculer $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CD}$.

Exercice 08 ABCD est un parallélogramme tel que $AB = 5$, $AD = 4$ et $BD = 6$. Calculer $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$.

Orthogonalité

Exercice 09 Dans un repère orthonormé, on considère les points : $A\,(4\ ;\ 3)$ $B\,(2\ ;\ 0)$ $C\,(5\ ;\ -2)$ $D\,(0\ ;\ 2)$
Les droites (AB) et (BC) sont-elles perpendiculaires ? et les droites (AC) et (AD) ?

II) Produit scalaire dans l'espace

Définition et Propriétés

Exercice 10 Dans un repère orthonormé de l'espace, on considère les points :

$$A\,(1\ ;\ 2\ ;\ -1) \qquad B\,(0\ ;\ 1\ ;\ 1) \qquad C\,(1\ ;\ 0\ ;\ 2)$$

Calculer $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$. En déduire une valeur approchée au degré près de $\widehat{BAC}$.

Orthogonalité

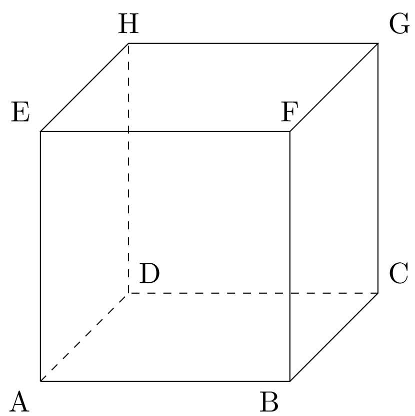
Exercice 11 Dans un repère orthonormé de l'espace, on considère les droites (d_1) et (d_2) d'équations :

$$(d_1) : \begin{cases} x = 2+t \\ y = 1-2t \\ z = 1+t \end{cases} \quad t \in \mathbb{R} \qquad (d_2) : \begin{cases} x = 1+2t' \\ y = 3+t' \\ z = 1 \end{cases} \quad t' \in \mathbb{R}$$

(d_1) et (d_2) sont-elles orthogonales ?

Exercice 12 Dans le cube ABCDEFGH ci-dessous, nommer :

- deux droites orthogonales non sécantes
- deux droites perpendiculaires
- deux droites non orthogonales



Vecteur normal à un plan

Exercice 13 Dans un repère orthonormé de l'espace, on considère les points :

$$A\,(1\ ;\ 1\ ;\ 0) \qquad B\,(2\ ;\ 0\ ;\ -1) \qquad C\,(1\ ;\ 2\ ;\ 1)$$

Montrer que le vecteur $\overrightarrow{n}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ est normal au plan (ABC).

Projection orthogonale

Positions relatives

Équation cartésienne d'un plan

Exercice 14 Donner une équation du plan $\mathscr{P}$ passant par $A\,(1\ ;\ 0\ ;\ 3)$ et de vecteur normal $\overrightarrow{n}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$.

Exercice 15 Donner une équation du plan $\mathscr{P}$ passant par $A\,(-2\ ;\ 1\ ;\ 3)$ et orthogonal à la droite (BC), avec $B\,(1\ ;\ -2\ ;\ 2)$ et $C\,(4\ ;\ 1\ ;\ -1)$.

Exercice 16 Soit $\mathscr{P}$ le plan de l'espace d'équation $3x + y - 2z + 3 = 0$.
Déterminer un vecteur normal à $\mathscr{P}$ ainsi qu'un point de $\mathscr{P}$.